



**Garantierte polytope
Zustandsmengenbeobachtung und
Stör- und Eingangs-/Ausgangs-
größeneinschließung für lineare
zeitdiskrete Systeme mit unsicheren
Parametern bei beschränkten
Störungen und Messfehlern**

von

Dipl.-Ing. Jan Falkenhain

Forschungsbericht

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Systemklasse und Modellbeschreibung	11
2.1. Systemklasse	11
2.2. Modellierung von Messfehlern	12
2.3. Störungen und Störmodelle	15
2.4. Modelle mit unsicheren Parametern	16
2.4.1. Intervallmatrizen	17
2.4.2. <i>Strukturierte Beschreibung</i>	18
2.4.3. <i>Polytope Beschreibung</i>	19
2.5. Modelle für die Zustandsmengenbeobachtung	20
3. Modellermittlung	22
3.1. Physikalische Modellierung	22
3.2. Ermittlung vollständiger Modelle	23
3.3. Diskretisierung	30
3.4. Hauptkomponentenanalyse für unsichere Parameter	32
4. Prädiktion	36
4.1. Ziel der Zustandsprädiktion	36
4.2. Prädiktion für LDTI-Systeme	39
4.2.1. Exakte Prädiktion	39
4.2.2. N-minimale Prädiktion, Überapproximation	42
4.3. Prädiktion für LDPV-Systeme (mit unsicheren Parametern)	44
4.3.1. Prädiktion mit <i>Strukturierter Beschreibung</i>	45
4.3.2. Prädiktion für <i>Polytope Beschreibung</i>	50
4.3.3. Einfluss der unsicheren Parameter (bei <i>Strukturierter Beschreibung</i>)	53
4.4. Berechnung von Ausgangs- und Zustandsintervallen	65
4.5. Auswahl eindeutiger Zustandsschätzungen	68
4.6. Zusammenfassung und Vergleich des Rechenaufwands	69
5. Zustandsmengenbeobachtung	72
5.1. Ziel der Zustandsmengenbeobachtung	72
5.2. Algorithmus der schrittweisen Beobachtung	74
5.3. Beobachtung für LDTI-Systeme	81
5.3.1. LDTI-Systeme ohne Durchgriff	81
5.3.2. LDTI-Systeme mit Durchgriff.	83
5.4. Verwendung von Störmodellen	87
5.5. Beobachtung ohne Anfangszustandsmenge	93
5.6. Beobachtbarkeit und Beschränktheit	96
5.7. Abschätzung des Beobachtungsfehlers	101
5.8. Wahl der Einschließungsrichtungen	108
6. Verzögerte Beobachtung und E/A-Einschließung (Störgrößeneinschließung)	111
6.1. Ziel der verzögerten Beobachtung und E/A-Einschließung	111
6.2. E/A-Einschließung bei Zustandsmengenbeobachtung	112

6.3. Kompakte verzögerte Beobachtung (für LDTI-Systeme)	113
6.4. Verzögerte Beobachtung für LDPV-Systeme	123
6.4.1. Probleme der Erweiterung des Verfahrens für LDTI-Systeme . .	123
6.4.2. Prädiktion für das inverse System	123
6.4.3. Berechnung von E/A- und Störgrößeneinschließungen	124
6.4.4. Prinzip der schrittweisen verzögerten Beobachtung und E/A- Einschließung	130
7. Konsistenzbasierte Diagnose	138
Anhang	142
Literatur- und Quellenverzeichnis	142
Abbildungsverzeichnis	146
A. Geometrie konvexer Polytope und Polyeder	150
B. Intervallarithmetik	170

1. Einleitung

In diesem Bericht wird ein spezieller Ansatz zur Zustandsmengenbeobachtung und zur Ermittlung von Stör- und Eingangs-/Ausgangsgrößeneinschließungen behandelt sowie zuletzt Anwendungen der Methoden für die Diagnose technischer, dynamischer Systeme. Dieser Ansatz folgt dem Paradigma, dass Modellunsicherheiten explizit formuliert werden und zwar so konservativ, dass das ‚Normalverhalten‘ des Systems immer durch die Modellbeschreibung repräsentiert wird. Die Berücksichtigung von Modellunsicherheiten in Form von beschränkten Messfehler, Störungen und Parameterunsicherheiten führt dazu, dass mit Hilfe dieser Modelle keine exakte Ermittlung des aktuellen Zustands, der Störgrößen oder ungenau gemessener Eingangs-/Ausgangsgrößen (E/A-Größen) möglich ist. Stattdessen werden Algorithmen vorgestellt, die online Mengen berechnen, welche bei konsistentem Systemverhalten die wahren Werte garantiert enthalten. Wenn die ermittelte Zustandsmenge leer ist, so ist das Modell nicht konsistent zu den verarbeiteten Messwerten. Diese Information kann zu Diagnosezwecken genutzt werden.

Die Dynamik technischer Systeme lässt sich oft durch Systeme von Differenzialgleichungen beschreiben, welche sich zu Zustandsraummodellen zusammenfassen lassen. So werden hier lineare zeitdiskrete Systeme betrachtet. Bei der physikalische Beschreibung stellt man fest, dass physikalische Parameter im Allgemeinen nur ungenau bekannt sind. So ist beispielsweise die Lastmasse eines Fahrzeugs oder Krans prinzipiell hinreichend genau messbar und kann damit als stückweise konstant angenommen werden. Allerdings ist eine Änderung der Masse durch Be- und Entladung nach jedem Transportvorgang möglich, wobei in der Regel keine Messung vorgenommen werden kann. Dann müssen die verwendeten Regelungskonzepte robust gegenüber Änderungen sein und damit für alle zulässigen Massen ihre Spezifikationen erfüllen [Ack93]. Modellierungsmöglichkeiten für unsichere Parameter sind aus der *Robusten Regelung* bekannt. Auch hier werden unsichere Parameter durch Mengen beschrieben, welche garantieren, dass sie den tatsächlichen Parameterwert enthalten. Außerdem werden Messunsicherheiten durch Intervalle beschrieben, die den maximalen Messfehler berücksichtigen.

Der hier gewählte Ansatz der Mengenbeobachtung folgt dem Prädiktor-Korrektor-Schema, d.h. dass Zustandsmengen zunächst für einen Zeitschritt prädiziert werden, bevor eine Korrektur durch die vorliegenden Messungen erfolgt, auch wenn diese Vorgänge im Algorithmus nicht strikt getrennt sein müssen. Die erwähnten unsicheren Parameter liegen in polytopen Regionen (\mathcal{V} -Darstellung) im Parameterraum. Zustandsmengen werden immer durch Polytope im Zustandsraum beschrieben, während Signale zumeist in Intervallen liegen. Polytope und Polyeder sind ‚eben‘ begrenzte Mengen. Im Zustandsraum werden die Mengen in Hyperebene-Darstellung (\mathcal{H} -Darstellung) formuliert. Wie aus der klassischen Beobachtung bekannt ist, können nur dann Informationen über ungenau bekannte Eingangssignale gewonnen werden, wenn die Beobachtung verzögert wird. Dieser Ansatz wird hier zur Berechnung von E/A- und Störgrößeneinschließungen auf die Mengenbeobachtung übertragen.

Bei fortschreitender Prädiktion, aber auch bei Zustandsmengenbeobachtung kann die Komplexität der Zustandpolytope so ansteigen, dass ein praktisch einsetzbarer Algorithmus eine Überapproximation erfordert. Wenn unsichere Parameter vorliegen erhält man im Allgemeinen außerdem nicht-konvexe Mengen. Die Berechnung exakter oder

minimal-konvexer Zustandsmengen wird hier zwar gezeigt und kann zur Systemanalyse eingesetzt werden. Für praktische Zwecke wird aber empfohlen, nach gründlicher Analyse feste Einschließungsrichtungen für die Zustandsmenge festzulegen. Diese können dann durch die Lösung linearer Programme in einem Schritt ermittelt werden, wenn eine kompakte Darstellung des Beobachtungsproblems gewählt wird. Der numerische Aufwand ist damit annähernd konstant über der Zeit, womit entschieden werden kann, ob ein praktischer Einsatz des Algorithmus möglich ist.

Gegenüber der Literatur methodisch neu ist nach Kenntnis des Autors

- die systematische Erweiterung auf Systeme mit Durchgriff und
- die verzögerte Beobachtung bei unsicheren Modellparametern.

In **Kapitel 2** wird zunächst die Systemklasse dargestellt, für welche Beobachtungsmethoden in den folgenden Kapiteln vorgestellt werden. Dabei handelt es sich um lineare zeitdiskrete Systeme mit der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}\mathbf{d}(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\mathbf{d}(k). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Aus Sicht der Beobachtungsaufgabe können unbekannte, aber beschränkte Störungen oder messbare Störungen $\mathbf{d}(k)$ als Eingänge $\mathbf{u}(k)$ behandelt werden. Wenn Kenntnisse über die Dynamik der Störungen vorliegen, können Sörmodelle eingesetzt werden, weshalb für die Formulierung der Beobachtungsalgorithmen die Systemklasse reduziert werden kann (auf Systeme ohne Störeingänge). Unsichere Parameter finden dann prinzipiell Eingang in die Matrizen $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{B}(\mathbf{p})$, $\mathbf{C}(\mathbf{p})$, $\mathbf{D}(\mathbf{p})$. Methoden der polytopen Zustandsmengenbeobachtung, wie sie hier beschrieben werden, erfordern spezielle polytope Beschreibungen unsicherer Parameter. Als einfachste Beschreibungsform wird die Intervallmatrix eingeführt, in der jeder Matrixparameter für sich durch sein Minimum und Maximum charakterisiert wird. Zur Anwendung kommt aber im Folgenden hauptsächlich die hier dargestellte, allgemeine *Polytope Beschreibung* der Parameterunsicherheiten. Als Spezialfall dieses Modells wird auch die *Strukturierte Beschreibung* eingeführt. In jedem Fall liegen die Matrixparameter (z.B. $a_{i,j}$ in \mathbf{A}) in einer polytopen Menge im Parameterraum. $\mathbf{p}(k) \in [\mathbf{p}]$ wird als Variablenvektor für alle Formen polytoper Parameterunsicherheiten verwendet. Damit repräsentiert $\mathcal{M}(\mathbf{p})$ ein Modell, für welches hier Methoden der Zustandsmengenbeobachtung vorgestellt werden. Die Möglichkeiten zur Umwandlung der verschiedenen Beschreibungsformen werden aufgezeigt. Messfehler und Störsignale sind in diesem Kontext ebenfalls als Mengen zu formulieren. Sie liegen oft als Intervallvektoren vor, können aber auch direkt in eine polytope Darstellung $[\mathbf{u}](k)$, $[\mathbf{y}](k)$ überführt werden. Alle relevanten Informationen werden zu einer Modellstruktur \mathcal{M} zusammengefasst.

Kapitel 3 behandelt Aspekte der Ermittlung von Modellen $\mathcal{M}(\mathbf{p})$ nach Kapitel 2. So führt die physikalische Modellierung in der Regel auf nichtlineare zeitkontinuierliche Modelle. In allgemeinsten Form symbolisiert der Vektor $\mathbf{s}(k) \in [\mathbf{s}]$ jetzt unsichere Parameter. Diese können zunächst aus physikalischen Erwägungen oder aus einer notwendigen Linearisierung um den Arbeitspunkt entstehen. Um Modelle der Form (1.1) zu erhalten muss eine Diskretisierung mit der Abtastzeit T_s vorgenommen werden. Der Vorteil der Euler-Diskretisierung, dass die Beschreibungsformen unsicherer Parameter, nämlich *Polytope Beschreibung* und *Strukturierte Beschreibung* dabei erhalten bleiben,

wird herausgestellt. Die exakte Diskretisierung führt dagegen in der Regel auf komplizierte nichtlineare Zusammenhänge zwischen einer Vielzahl von Matrixparametern in der ermittelten zeitdiskreten Darstellung. Bereits als Modellierungsergebnis, durch Linearisierung oder Diskretisierung können solche beliebigen Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Matrixparametern entstehen und durch \mathbf{s} erfasst werden. Die Modelle $\mathcal{M}(\mathbf{s})$ müssen durch die in Kapitel 2 angegebenen Modelle $\mathcal{M}(\mathbf{p})$ approximiert werden, um die hier diskutierten Methoden der Zustandsmengenbeobachtung anwenden zu können. Dabei werden vollständige Modell ermittelt, welche Überapproximationen im Parameterraum darstellen, um damit garantierte Zustands- und Signaleinschließungen ermitteln. Es ist auch auf die Komplexität der Modelle zu achten, um diese für die Beobachtungsaufgabe einsetzen zu können. Als Hilfsmittel zur Ermittlung möglichst guter vollständiger Modelle für unsichere Parameter wird die Hauptkomponentenanalyse vorgestellt.

In **Kapitel 4** wird die polytope Prädiktion von Zustandsmengen behandelt. Darunter wird die Abbildung eines Polytops $\mathcal{X}(k)$ mit der Zustandsübergangsgleichung (Zeile 1 aus Gl.(1.1)), in Abhängigkeit vom Eingangssignal $\mathbf{u}(k)$ verstanden. Als Ergebnis erhält man das prädizierte Polytop $\mathcal{X}(k+1)$. Zustandsmengen werden im vorgestellten Ansatz genauso wie Mengen im Eingangs- und Ausgangssignalraum $\mathcal{U}(k)$ und $\mathcal{Y}(k)$ als Polytope oder Polyeder durch lineare Ungleichungssysteme wie folgt beschrieben:

$$\mathcal{X}(k) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}(k)\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(k)\} \quad (1.2)$$

Diese Hyperebenen-Darstellung (\mathcal{H} -Polytop) stellt eine Alternative zur Beschreibung eines Polytops durch seine Eckpunkte (\mathcal{V} -Polytop) dar, womit sich die gewählte Darstellung von den Parameterbeschreibungen aus Kapitel 2 unterscheidet. Sie eignet sich außerdem zur Beschreibung von Polyedern, worunter hier unbeschränkte, durch Hyperebenen begrenzte Mengen, verstanden werden. Außerdem wird Darstellung (1.2) bevorzugt, da insbesondere die Schnittbildung zweier Polytope bzw. Polyeder effizient algorithmisch gehandhabt werden kann. Beide Beschreibungsformen sowie wichtige Operationen auf Polytopen und Polyedern und deren Algorithmen werden im Anhang A angesprochen.

Die dargestellten Prädiktionsgleichungen für einen Zeitschritt k können rekursiv verwendet werden. So kann die Prädiktion über viele Zeitschritte fortgesetzt werden, wenn beispielsweise bei einer Beobachtung durch Ausfall eines Sensors keine Messinformationen zur Verfügung stehen. Ohne Parameterunsicherheiten kann man die Menge $\mathcal{X}^*(k+1)$ exakt prädizieren, weil das Abbildungsergebnis wieder ein konvexes Polytop ist. Der Index $*$ steht dabei für exakte Zustandsmengen, welche nur Zustände erhalten, die dem Modell entsprechend auch angenommen werden können. Aufgrund der mit k steigenden Komplexität der Beschreibung der $\mathcal{X}(k)$ durch eine wachsende Anzahl linearer Ungleichungen muss aber eine Überapproximation vorgenommen werden. Als wesentlicher Schritt der Zustandsmengenbeobachtung verdeutlicht die Prädiktion Schwierigkeiten bei der Abbildung mit den Matrizen $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{B}(\mathbf{p})$, welche unsichere Parameter enthalten. Die Bildmengen sind in der Regel nicht konvex, so dass Methoden zur Überapproximation für die verschiedenen Beschreibungsformen von unsicheren Parametern entwickelt werden müssen. Diese werden hier auch dahingehend untersucht, wie günstige Einschließungsrichtungen aufgrund der Eigenschaften von $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ angegeben werden können. Die Darstellung basiert auf den Arbeiten von [Pla06] für die *Strukturierte Beschreibung* und [ST99] für die *Polytope Beschreibung*.

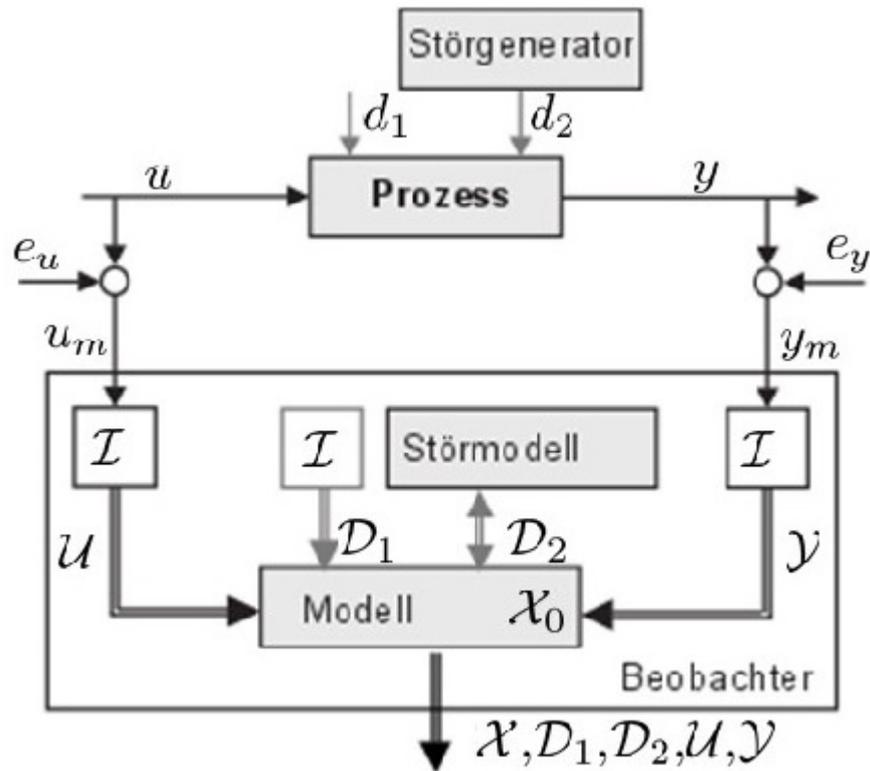


Bild 1.1: Struktur der Zustands- und Störgrößenbeobachtung

In **Kapitel 5** wird der Algorithmus der Zustandsmengenbeobachtung nach dem Prädiktor-Korrektor-Schema behandelt. Zur Realisierung garantierter Mengenbeobachter gibt es in der Literatur im wesentlichen einen alternativen Ansatz, bei dem der klassische Beobachter (mit Luenberger-Rückführung) so erweitert wird, dass die Zustände in Intervallen eingeschlossen werden. Der Ansatz taucht unter der Überschrift der *Intervallbeobachtung* auf und wird in [MPE⁺07], [PENdlH08] zur robusten Fehlerdetektion eingesetzt. In [LGA03] wird ein Verfahren beschrieben, diese Rückführung so zu entwerfen, dass der Beobachtungsfehler exponentiell gegen eine kompakte Menge konvergiert. Für Systeme mit unsicheren Parametern wird u.a. in [JD05] ein Intervallbeobachter entworfen.

Bild 1.1 zeigt die allgemeine Struktur der Zustands- und Störgrößenbeobachtung nach dem Prädiktor-Korrektor-Schema und verdeutlicht damit Unterschiede zur klassischen Beobachtung. Die Messungen \mathbf{u}_m bzw. \mathbf{y}_m der Eingangs- und Ausgangssignale des Prozesses enthalten die Überlagerung der wahren Signalwerte \mathbf{u}^* und \mathbf{y}^* mit den Messfehlern \mathbf{e}_u bzw. \mathbf{e}_y . Daraus bilden im Zustandsmengenbeobachter die mit \mathcal{I} bezeichneten Intervallgeneratoren Mengen $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{y}]$ (oder allgemeiner \mathcal{U} bzw. \mathcal{Y}). Wird das System von nicht messbaren, aber beschränkten Störungen \mathbf{d}_1 beeinflusst, so werden diese im Beobachter durch feste Intervalle als Eingangssignale berücksichtigt. Liegen weitere Informationen über die Dynamik der Störung \mathbf{d}_2 vor, so können diese als Störgenerator formuliert werden. Der Beobachter verwendet das Modell des Prozesses und das Störmodell um garantierte Zustandseinschließungen \mathcal{X} des Zustands \mathbf{x} zu ermitteln. In späteren Kapiteln wird gezeigt, dass auch E/A- und Störgrößeneinschließungen \mathcal{U} , \mathcal{Y} , \mathcal{D} berechnet werden können, wenn auch in der Regel nur mit einer zeitlichen Verzögerung.

Unter der Voraussetzung ungenauer Messinformationen und der Wirkung von Störungen und unsicheren Parametern ist die exakte Ermittlung des Systemzustands auch asymptotisch nicht möglich. Das Ziel der Zustandsmengenbeobachtung liegt deshalb in der Berechnung der Menge $\mathcal{X}^*(k)$ von Zuständen, welche ein dynamisches System von der Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0 aus erreichen kann, wenn es eine Eingangsfolge

$$\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}(k) \quad \forall k \in \{0, \dots, k_b - 1\} \quad (1.3)$$

erhält und dabei eine Ausgangsfolge

$$\mathbf{y}(k) \in \mathcal{Y}(k) \quad \forall k \in \{0, \dots, k_b\} \quad (1.4)$$

erzeugt. Die Menge $\mathcal{X}^*(k_b)$ ist die exakte Zustandsmenge, wenn sie nur mit der E/A-Folge konsistente Zustände enthält. Ist die Berechnung der exakten Zustandsmenge zu aufwändig, wird stattdessen eine einschließende Menge, also eine Überapproximation $\mathcal{X}(k) \supset \mathcal{X}^*(k)$ der exakten Zustandsmenge gesucht.

Der Beobachtungsalgorithmus nach dem Prädiktor-Korrektor-Schema löst dazu in jedem Zeitschritt die folgenden drei Aufgaben (Abb. 1.2):

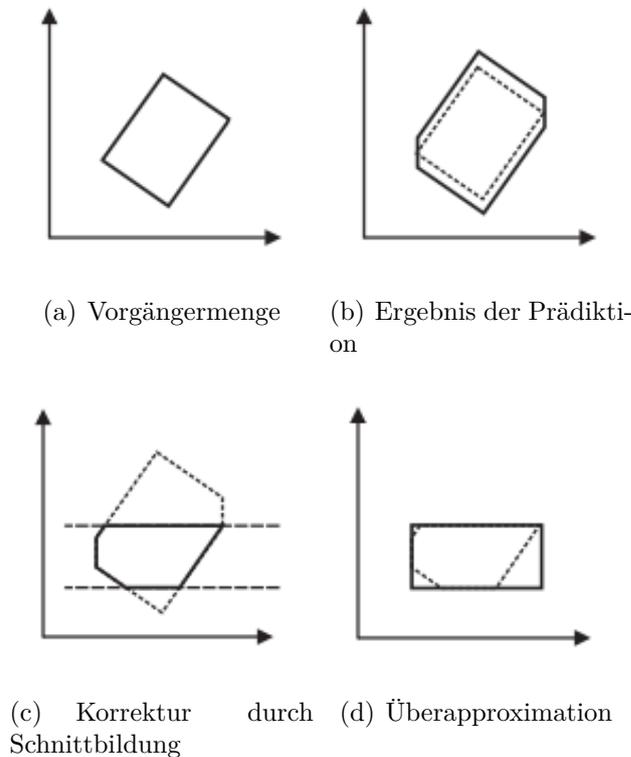


Bild 1.2: Allgemeine Schritte der Zustandsmengenbeobachtung

1. **Prädiktion.** Die Prädiktion ermittelt die Menge $\mathcal{X}_p(k)$ möglicher Zustände $\mathbf{x}(k)$ durch Auswertung der Zustandsübergangsgleichung (1.1) mit der Vorgängermenge $\mathcal{X}(k-1)$ und unter Kenntnis der Eingangsmenge $\mathcal{U}(k-1)$.
2. **Korrektur** (Messung). Die Korrektur erfolgt durch Schnittbildung der prädierten mit der gemessenen Menge $\mathcal{X}_m(k)$, welche durch Auswertung der Ausgangsgleichung (1.1) unter Verarbeitung der aktuellen, unsicheren Messinformation $\mathcal{Y}(k)$ gewonnen wird:

$$\mathcal{X}_K(k) = \mathcal{X}_p(k) \cap \mathcal{X}_m(k).$$

3. **Überapproximation.** Um die Komplexität der Mengenbeschreibung zu reduzieren, kann das Verfahren um einen Schritt zur Überapproximation

$$\mathcal{X}(k) \supseteq \mathcal{X}_K(k)$$

erweitert werden.

Abb. 1.2 veranschaulicht diese drei Schritte der Zustandsmengenbeobachtung zum Zeitpunkt k . In Abhängigkeit vom betrachteten System, der Mengenbeschreibung und der verwendeten Berechnungsverfahren können mehrere Schritte zusammengefasst werden, oder sind implizit enthalten.

Hier wird der beschriebene Algorithmus durch polytope Zustandsmengen realisiert. In der Literatur wurden verschiedene Arten der Mengenbeschreibung (in Abhängigkeit von unterschiedlichen Systemklassen) zur Beobachtung nach dem Prädiktor-Korrektor-Schema untersucht. Zunächst wurde in [Sch68], [Sch73] die Einschließung durch Ellipsoide untersucht. [Küh98] und [ABC05] verwenden Zonotope. In [LJW01] wird die Einschließung durch Intervallzerlegungen vorgeschlagen, womit sich allgemeiner auch nichtlineare Systeme behandeln lassen (siehe auch [Rau08], [Wol10] u.a.).

In **Kapitel 6** werden die Methoden der Zustandsmengenbeobachtung so erweitert, dass Zustandsmengen auch verzögert ermittelt werden können. Fragt man zum Zeitpunkt k nach der Zustandsmenge $\mathcal{X}(k - k_v)$, welche den wahren Zustand $\mathbf{x}^*(k - k_v)$ in der Vergangenheit einschließt, so erscheint es verständlich, dass dann bessere Einschließungen des Zustands ermittelt werden können, als k_v Zeitschritte zuvor. Grund dafür sind die zusätzlichen Messinformationen. Leider sind quantitative Aussagen dazu schwierig, ob und wie eine verzögerte Beobachtung bessere Zustandseinschließungen ermöglicht. Die Methoden für Modelle ohne unsichere Parameter wurden in [FL11] veröffentlicht und werden hier für Modelle mit unsicheren Parametern erweitert.

Technische Prozesse werden oft von nicht messbaren Störungen beeinflusst. Die Berücksichtigung dieser Störungen beim Entwurf von klassischen Folgereglern geht auf [DS74], [Joh71] zurück. Zu Diagnosezwecken und für die Störkompensation durch eine Regelung werden Störgrößenbeobachter eingesetzt, um die Störampplitude aus den messbaren Eingangs- und Ausgangssignalen des Prozesses zu rekonstruieren. Liegen nicht messbare Eingangssignale vor, so kann nur unter sehr strengen Bedingungen ein klassischer Beobachter mit asymptotisch verschwindendem Beobachtungsfehler entworfen werden [Har84], [Hou99]. In [HP98] wird die Beobachtbarkeit von Eingangssignalen für kontinuierliche Systeme definiert. Für zeitdiskrete Systeme kann dann durch eine ‚verzögerte Beobachtung‘, aber mit bis zur Zeit k vorliegenden Messwerten, der Zustand $\mathbf{x}(k - k_v)$ ermittelt werden [JTP97], wobei Existenzbedingungen für den Beobachter zur Festlegung der notwendigen Verzögerung k_v angegeben werden [KV80]. Eine Erweiterung zur Ermittlung der Störgröße kann [FB06] entnommen werden.

So bietet in Erweiterung der klassischen Beobachtung die verzögerte Zustandsmengenbeobachtung die Möglichkeit, verbesserte Eingangseinschließungen mit Verzögerung zu berechnen. Dies gilt für Störungen wie auch für besonders ungenaue Messungen von Ein- und Ausgängen. Eine weitere Anwendung besteht darin, offline auf der Basis der gemessenen Daten verbesserte Einschließungen zu berechnen. Dies wird in Kapitel 7 an einem Beispiel demonstriert.

In **Kapitel 7** wird gezeigt, wie die Zustandsmengenbeobachtung zur Fehlerdiagnose eingesetzt werden kann. Ein Fehler ist dann detektiert, wenn die Zustandsmengenbeobachtung auf die leere Menge führt, womit das Prozessmodell inkonsistent zu den vorliegenden Messwerten ist. Werden mögliche Fehlerfälle ebenfalls durch Modelle beschrieben, so kann der Fehler möglicherweise identifiziert werden. Konsistenzbasierte Diagnose mit den hier behandelten Methoden wurde zuerst in [Pla06] durchgeführt.

2. Systemklasse und Modellbeschreibung

In diesem Kapitel werden Modelle angegeben, für die in späteren Kapiteln Methoden der Zustandsmengenbeobachtung vorgestellt werden. Die Systemklasse ist durch lineare zeitdiskrete Systeme nach Gl. (1.1) gegeben. Aufgrund der gewählten Handhabung von Störeingängen aus Beobachtersicht, welche in Abschnitt 2.3 dargelegt wird, ergeben sich einfachere Zustandsraummodelle mit nur einem Eingangsvektor $\mathbf{u}(k)$ (Abschn. 2.1). Unsicherheiten in den Modellparametern werden durch den Vektor \mathbf{p} symbolisiert, welcher für die verwendeten Beschreibungsformen *Strukturierte Beschreibung* und *Polytope Beschreibung* steht (Abschn. 2.3). Neben der Modellierung von Messfehlern und Störungen (Abschn. 2.2) wird auch eine Systemklasse für Störmodelle angegeben. In Abschnitt 2.5 wird eine Schreibweise für Modelle \mathcal{M} eingeführt, um einen Überblick über die zulässigen Modellbeschreibungen zu gewinnen.

2.1. Systemklasse

Lineares zeitdiskretes zeitinvariantes System (LDTI-System). In dieser Arbeit wird die bereits mit Gl. (1.1) angegebene Klasse der linearen zeitdiskreten dynamischen Systeme, gegeben durch das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}\mathbf{d}(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\mathbf{d}(k).\end{aligned}\tag{2.1}$$

betrachtet. Darin bezeichnet $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ den zeitdiskreten Systemzustand zum Zeitpunkt k und \mathbf{x}_0 den Anfangszustand. $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ ist der messbare Eingang, $\mathbf{d}(k) \in \mathbb{R}^q$ ein unbekannter Störeingang und $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^r$ das Messsignal des Systemausgangs. Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird als Systemmatrix oder Zustandsübergangsmatrix bezeichnet. $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist die Eingangsmatrix, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ die Störeingangsmatrix. Die Wirkung des Zustands auf den Ausgang beschreibt die Ausgabematrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$. Wenn sich Eingangssignale direkt auf den Ausgang des Systems auswirken, so enthält die Modellbeschreibung nicht verschwindender Matrizen $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ für den Durchgriff oder $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times q}$ für den Stördurchgriff.

Für die hier behandelte Beobachtungsaufgabe können Störungen allerdings wie Eingangsgrößen behandelt werden (siehe Abschn. 2.3). Für messbare Störungen $\mathbf{d}_m(k)$ ist dies naheliegend unter der Annahme eines beschränkten Messfehlers. Aber auch nicht messbare Störungen, welche hier immer als beschränkt angenommen werden, können wie messfehlerbehaftete Eingänge behandelt werden. Wenn dynamische Störmodelle vorliegen, muss der Zustandsraum erweitert werden, um diese Information sinnvoll nutzen zu können. Aus der beschriebenen Behandlung der Störeingangs resultiert die für die Beobachtungsmethoden ausreichende Darstellung durch das folgende System:

$$\begin{aligned}LDTI_{ABCD} : \quad \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Der direkte Durchgriff \mathbf{D} tritt seltener bei der Modellierung auf und bereitet bei der Ableitung von Beobachtungsmethoden gewisse Schwierigkeiten, weshalb häufig zunächst von Systemen

$$\begin{aligned}LDTI_{ABC} : \quad \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)\end{aligned}\tag{2.3}$$

mit verschwindendem Durchgriff ausgegangen wird.

Lineares zeitdiskretes parametervariables System (LDPV-System). Als Resultat physikalischer Modellierung erhält man Modelle, deren Parameter nur ungenau bekannt sind, oder sich mit der Zeit in gewissen Grenzen verändern. Deshalb werden hier LDPV-Systeme

$$\begin{aligned} LDPV_{[ABCD](p)} : \quad \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(p(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(p(k))\mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ & & & (2.4) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(p(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(p(k))\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

verwendet, worin die Parameter sich zeitlich mit dem Vektor $\mathbf{p}(k) \in [\mathbf{p}]$ verändern. Die genaue Form der für die hier behandelten Methoden zulässigen Parameterbeschreibungen wird in Abschn. 2.4 diskutiert. Parametervariationen in der Ausgabegleichung können Schwierigkeiten verursachen, weshalb eine Beschränkung auf Systeme der Form $LDPV_{[AB](p),CD}$ zweckmäßig ist. Auch hier wird der Einfachheit halber auf Systeme mit direktem Durchgriff oft verzichtet.

2.2. Modellierung von Messfehlern

Messunsicherheiten. Die zum Zeitpunkt k gemessenen Ein- und Ausgangssignale

$$\mathbf{u}_m(k), \mathbf{y}_m(k) \quad (2.5)$$

unterscheiden sich aufgrund von Messfehlern von den unbekanntem, wahren Signalen, die mit

$$\mathbf{u}^*(k), \mathbf{y}^*(k) \quad (2.6)$$

bezeichnet werden. Der unbekanntem Messfehler ist durch

$$\mathbf{e}_u(k) = \mathbf{u}_m(k) - \mathbf{u}^*(k), \quad \mathbf{e}_y(k) = \mathbf{y}_m(k) - \mathbf{y}^*(k) \quad (2.7)$$

gegeben. Er sei komponentenweise beschränkt, die Schranken müssen aber im Allgemeinen nicht symmetrisch zum wahren Wert sein, was auf die Darstellung durch die Intervallvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u(k) &\in [\mathbf{e}]_u = [-\Delta\bar{\mathbf{u}}; \Delta\underline{\mathbf{u}}], \\ \mathbf{e}_y(k) &\in [\mathbf{e}]_y = [-\Delta\bar{\mathbf{y}}; \Delta\underline{\mathbf{y}}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

führt mit den elementweise positiven maximalen Abweichungen $\Delta\underline{\mathbf{u}} > 0, \Delta\bar{\mathbf{y}} > 0$ nach oben und $\Delta\bar{\mathbf{u}} > 0, \Delta\underline{\mathbf{y}} > 0$ nach unten.

Unsymmetrische Fehlerschranken. Warum die scheinbar ungewöhnliche Darstellung (2.8) gewählt wird, zeigt die folgende Betrachtung, welche zunächst nur für die Eingangsgröße durchgeführt wird. Das modellierte Fehlerintervall bildet einen Bereich

$$[\mathbf{u}] = [\underline{\mathbf{u}}; \bar{\mathbf{u}}]$$

um den wahren Wert, welcher den Messwert garantiert mit einschließt (siehe Abb.2.1, oben):

$$\mathbf{u}_m(k) \in [\mathbf{u}](k) = \mathbf{u}^*(k) + [\mathbf{e}]_u = [\mathbf{u}^*(k) - \Delta\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}^*(k) + \Delta\underline{\mathbf{u}}]. \quad (2.9)$$

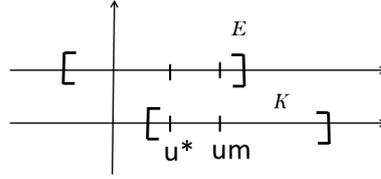


Bild 2.1: Konfidenz und Fehlerintervall bei unsymmetrischen Fehlerschranken

Dem Beobachter liegt jedoch der Wert $\mathbf{u}_m(k)$ aus der Messung vor und er bildet mit dem Intervallgenerator \mathcal{I} (siehe Abb. 1.1) den Intervallvektor $[\mathbf{u}]$ mit Hilfe des Konfidenzintervalls $[\mathbf{k}]_u$, welches sich offensichtlich vom Fehlerintervall $[\mathbf{e}]$ unterscheidet. Der Begriff Konfidenzintervall wird hier in dem Sinne verwendet, dass der wahre Wert garantiert in diesem Intervall um den Messwert liegt:

$$\mathbf{u}^*(k) \in [\mathbf{u}](k) = \mathbf{u}_m(k) + [\mathbf{k}]_u. \quad (2.10)$$

Aus Gleichung (2.9) folgt intervallaritmetisch

$$\mathbf{u}^*(k) \in [\mathbf{u}](k) = \mathbf{u}_m(k) + (-1) \cdot [\mathbf{e}]_u = \mathbf{u}_m(k) + [-\Delta\mathbf{u}; \Delta\bar{\mathbf{u}}]. \quad (2.11)$$

also mit $[\mathbf{k}]_u = -[\mathbf{e}]_u$, was im Fall $\Delta\mathbf{u} \neq \Delta\bar{\mathbf{u}}$ zu beachten ist. Der Intervallgenerator erzeugt aus Gl.(2.10) letztlich die Konfidenzintervalle

$$\mathbf{u}^*(k) \in [\mathbf{u}] = \mathbf{u}_m(k) + [\mathbf{k}]_u \quad (2.12)$$

$$= [\mathbf{u}_m(k) - \Delta\mathbf{u}; \mathbf{u}_m(k) + \Delta\bar{\mathbf{u}}] \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y}^*(k) \in [\mathbf{y}] = \mathbf{y}_m(k) + [\mathbf{k}]_y \quad (2.14)$$

$$= [\mathbf{y}_m(k) - \Delta\mathbf{y}; \mathbf{y}_m(k) + \Delta\bar{\mathbf{y}}] \quad (2.15)$$

welche im Allgemeinen sowohl von der Zeit als auch vom gemessenen Signal selber abhängig gemacht werden können:

$$[\mathbf{k}]_u(k, \mathbf{u}_m(k)), \quad [\mathbf{k}]_y(k, \mathbf{y}_m(k)) \quad (2.16)$$

Symmetrische Fehlerschranken. Einfacher gestaltet sich die Betrachtung des häufig anwendbaren Spezialfalls beschränkter Messfehler durch symmetrische Fehlerschranken, da Fehler- und Konfidenzintervall dann identisch sind:

$$|\mathbf{e}_u^*(k)| \leq \Delta\mathbf{u}_{max}(k), \quad |\mathbf{e}_y^*(k)| \leq \Delta\mathbf{y}_{max}(k) \quad (2.17)$$

gegeben. Prozentuale Messfehler können durch eine elementweise Skalierung der Konfidenzintervalle

$$[\mathbf{k}]_u(\mathbf{u}_m(k)) = [\tilde{\mathbf{k}}]_u \circ \mathbf{u}_m(k), \quad [\mathbf{k}]_y(\mathbf{y}_m(k)) = [\tilde{\mathbf{k}}]_y \circ \mathbf{y}_m(k) \quad (2.18)$$

formuliert werden, wobei durch \circ eine elementweise Vektormultiplikation dargestellt wird. In Abb. 2.2 sind die behandelten Fälle veranschaulicht.

Zeitvarianz des Modells. Im Folgenden sollen in der Darstellung die zeitinvarianten Fehlerschranken $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{y}]$ verwendet werden, auch wenn in allen entwickelten Methoden eine von außen vorgegebene Zeitabhängigkeit berücksichtigt werden kann. Insbesondere Fehlerschranken können problemlos zeitvariabel modelliert werden, wie eben gezeigt.

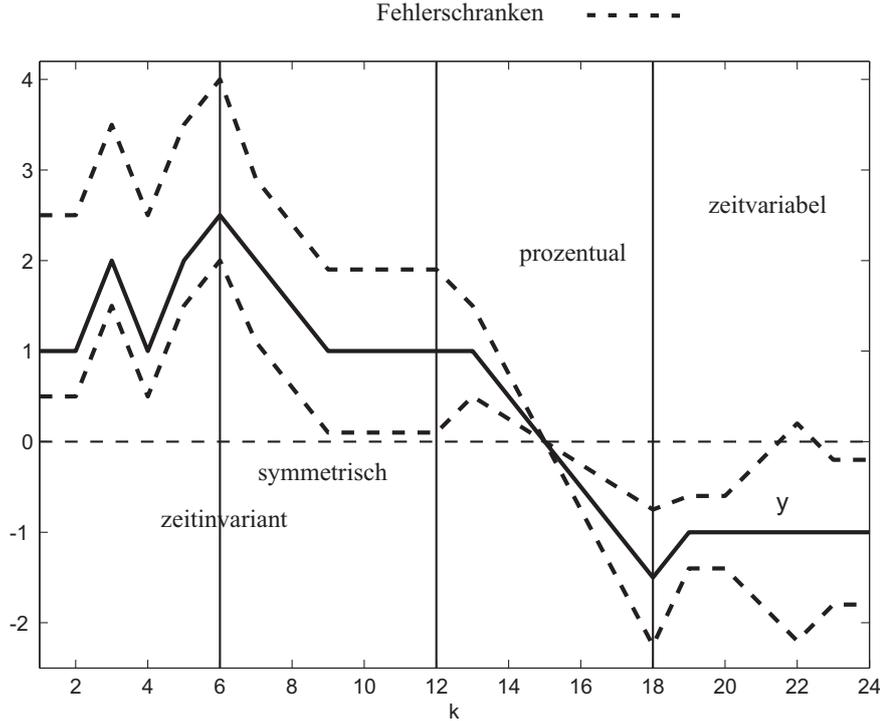


Bild 2.2: Fehlerschranken am Beispiel des Messsignals

Ebenso möglich sind aus Beobachtersicht im Allgemeinen zeitvariable Systembeschreibungen $LDPV(k)$ oder Parametereinschließungen $[\mathbf{p}](k)$. Dann ist eventuell die Vorgehensweise bei der Beobachtung dem Zeitverlauf anzupassen. Im Folgenden wird auf die Berücksichtigung möglicher Zeitabhängigkeit in der Darstellung aller Modelleigenschaften zumeist verzichtet.

Eingangspolytope und Messpolytope. In der Regel können die Fehlerschranken der einzelnen Komponenten von Ein- und Ausgangsvektoren als unabhängig voneinander modelliert werden, wie es zuvor beschrieben wurde. Allerdings handelt es sich dabei um den Spezialfall achsenparalleler Polytope im jeweiligen Signalraum. Allgemeiner soll mit

$$\mathbf{u}^*(k) \in \mathcal{U}(k), \quad \mathbf{y}^*(k) \in \mathcal{Y}(k) \quad (2.19)$$

bezeichnet werden, dass der wahre Signalwert konvexen, polytopen Beschränkungen $\mathcal{U}(k), \mathcal{Y}(k)$ im jeweiligen Signalraum unterliegt. Liegen diese E/A-Polytope vor, dann können die im Folgenden dargestellten Beobachtungsmethoden ebenfalls verwendet werden. Für die mathematische Darstellung wird deshalb davon ausgegangen, dass Mengen im Folgenden einheitlich durch Polytope beschrieben werden. Es wird zur Darstellung

$$\mathcal{U}(k) := \{\mathbf{u} \mid \mathbf{M}_u \mathbf{u} \leq \mathbf{b}_u(k)\} \quad (2.20)$$

übergangen. Darin definieren die Zeilen der Matrix \mathbf{M}_u die Richtungen im Eingangsraum, welche das Polytop begrenzen, während die aktuellen Messungen $\mathbf{u}_m(k)$ den zeitvariablen Vektor $\mathbf{b}_u(k)$ bestimmen:

$$\mathcal{I}_u : \mathbf{M}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_u(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_m(k) + \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ -\mathbf{u}_m(k) + \Delta \underline{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k) \\ -\underline{\mathbf{u}}(k) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Im Ausgangsraum ist das Signal $y_m(k)$ analog zu (2.20) in das Polytop

$$\mathcal{Y}_m(k) := \{\mathbf{y} \mid \mathbf{M}_y \mathbf{y} \leq \mathbf{b}_y(k)\} \quad (2.22)$$

eingeschlossen. Für die elementweise Fehlerschranke auf den Ausgangsmessungen wird mit

$$\mathcal{I}_y : \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ -\mathbf{I}_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_y(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_m(k) + \Delta \bar{\mathbf{y}} \\ -\mathbf{y}_m(k) + \Delta \underline{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}}(k) \\ \underline{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

der Spezialfall des achsenparallelen Quaders $\mathcal{Y}_m(k)$ als Polytop im Ausgangssignalraum beschrieben.

2.3. Störungen und Störmodelle

Störsignale. Messbare Störungen $\mathbf{d}_m(k)$ können bei Kenntnis über die Beschränktheit des Messfehlers unmittelbar wie Eingangsgrößen behandelt werden. Hier sollen auch Störungen als Eingangssignale aufgefasst werden, über deren wahren Wert $\mathbf{d}^*(k)$ keinerlei Messinformationen vorliegen. Aus physikalischen Betrachtungen müssen aber Störintervalle

$$\mathbf{d}_m(k) \in [-\Delta \bar{\mathbf{d}}, \Delta \underline{\mathbf{d}}] = [\mathbf{d}] \quad (2.24)$$

ermittelt werden, welche die wahre Störung garantiert enthalten. Aus Sicht des Beobachters ergibt sich dann analog zu den Eingangs- und Ausgangseinschließungen (2.13), (2.15)

$$\mathbf{d}^*(k) \in [-\Delta \underline{\mathbf{d}}, \Delta \bar{\mathbf{d}}] = [\mathbf{d}]. \quad (2.25)$$

Wenn $0 \in [\mathbf{d}]$ gilt, bedeutet das nichts anderes, als dass die Störung als Eingangssignal mit fiktiver Messung $\mathbf{d}_m(k) \equiv 0$ behandelt wird.

Analog zur Darstellung (2.21) können allgemeine Polytope im Störeingangsraum formuliert werden, bzw. die Störintervalle (2.25) lassen sich als Polytope formulieren:

$$\mathcal{D} := \{\mathbf{d} \mid \mathbf{M}_d \mathbf{d} \leq \mathbf{b}_d\} \quad (2.26)$$

Diese A-priori Kenntnis über die Störschranken führt auf die konstanten Größen

$$\mathcal{I}_d : \mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{d}} \\ \Delta \underline{\mathbf{d}} \end{pmatrix}.$$

Zur Verwendung der Beobachtungsmethoden auf Basis der Systeme (2.2) bis (2.4) werden Eingangs- und Störgrößen zum komponierten Eingangsvektor $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}^T, \mathbf{d}^T)^T$ zusammengefasst, so dass in der Zustandsgleichung die erweiterte Eingangsmatrix $\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{B}, \mathbf{E}]$ entsteht. Die polytope Beschreibung ist dann durch

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) \in \tilde{\mathcal{U}}(k) := \{\tilde{\mathbf{u}} \mid \tilde{\mathbf{M}}_u \tilde{\mathbf{u}} \leq \tilde{\mathbf{b}}_u(k)\} = \mathcal{U}(k) \times \mathcal{D} \quad (2.27)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_d \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_u(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_u(k) \\ \mathbf{b}_d \end{pmatrix}$$

gegeben.

Störmodelle. Bisher wurden Störungen $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1$ als Eingänge mit festen Intervallgrenzen (2.25) behandelt. Liegt ein dynamisches Modell der Störung vor, so kann dieses bei der Zustandsmengenbeobachtung verwendet werden, wie für $\mathbf{d} = \mathbf{d}_2$ in Abb. 1.1 gezeigt. Im Allgemeinen kann das Störgrößenmodell in zeitdiskreter Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{D} - LDTI : \quad \mathbf{x}_d(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{B}_d \Delta \mathbf{x}_d(k), & \mathbf{x}_d(0) &= \mathbf{x}_{d0}, \\ \mathbf{y}_d(k) &= \mathbf{F}_d \mathbf{x}_d(k), \\ \mathbf{d}(k) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) \end{aligned} \quad (2.28)$$

gegeben sein. Der fiktive Ausgang $\mathbf{y}_d(k)$ dient der Darstellung von Schranken für die Zustände des Störmodells durch $-\underline{\mathbf{y}}_d \leq \mathbf{y}_d(k) \leq \bar{\mathbf{y}}_d$. Der Eingang ist durch Intervalle $-\Delta \underline{\mathbf{x}}_d \leq \Delta \mathbf{x}_d(k) \leq \Delta \bar{\mathbf{x}}_d$ gegeben und kann zur Formulierung maximaler Änderungsraten der Störung verwendet werden. In speziellen Fällen können unsichere Parameter im Störmodell sinnvoll sein, z.B. $\mathbf{A}_d(\mathbf{p})$, und man erhält ein System vom Typ \mathcal{D} -LDPV.

Es wird nun das erweiterte Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}(k), & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{y}}(k) &= \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(k) \end{aligned}$$

aus dem System (2.3) und dem Störmodell (2.28) gebildet mit dem Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{x}_d(k)^T, \mathbf{x}(k)^T)^T$ und den Elementen

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & 0 \\ \mathbf{E}\mathbf{C}_d & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_d & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_d & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Die Eingangs- und Ausgangssignale für den Zustandsmengenbeobachter sind durch die Erweiterungen der Intervallvektoren (2.13), (2.15) mit

$$\hat{\mathbf{u}}(k) \in ([-\Delta \underline{\mathbf{x}}_d, \Delta \bar{\mathbf{x}}_d], \mathcal{U}(k))^T = \hat{\mathcal{U}}(k), \quad (2.30)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) \in ([-\underline{\mathbf{y}}_d, \bar{\mathbf{y}}_d], \mathcal{Y}(k))^T = \hat{\mathcal{Y}}(k) \quad (2.31)$$

gegeben. Der Beobachter verwendet die hier angegebenen erweiterten Größen und ermittelt damit auch Einschließungen der Störung. Die Erweiterung des Zustandsraumes ist notwendig, um Informationen über den Systemzustand des Störmodells zu gewinnen. In den meisten Fällen kann nur durch Zusammenfassen von Prozess- und Störmodell eine verbesserte Zustandseinschließung ermittelt werden.

2.4. Modelle mit unsicheren Parametern

Ungenau bekannte Parameter werden hier kürzer auch als unsichere Parameter bezeichnet und können im Prinzip in allen Matrizen des Systems (2.4) auftreten, wobei Schwierigkeiten in der Anwendung von Zustandsmengenbeobachtungen auftreten, wenn die Ausgabe Gleichung betroffen ist. Die Beschreibungsformen unsicherer Parameter werden für die unsymmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

hier eingeführt, stellvertretend für betroffene Matrizen $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ usw.

Eine Intervallmatrix erhält man, wenn jeder Matrixparameter $a_{i,j}$ für sich unabhängig von anderen Parametern beschränkt ist. Für die hier beschriebenen Methoden werden die *Strukturierte Beschreibung* und die *Polytope Beschreibung* verwendet, in denen der Vektor \mathbf{p} eingesetzt wird, um Abhängigkeiten zwischen den variierenden Matrixparametern zu berücksichtigen. Dies kann auch für Elemente der erweiterten Matrix $[\mathbf{A} \ \mathbf{B}](\mathbf{p})$ gelten, was nur dann sinnvoll ist, wenn die eingesetzte Beobachtungsmethode diese Abhängigkeiten berücksichtigt, um möglichst gute Einschließungen zu berechnen.

2.4.1. Intervallmatrizen

Sind die Parameter einer Matrix \mathbf{A} nach Gl. (2.32) nicht exakt bekannt, aber ihre Wertebereiche sind beschränkt und durch Intervalle

$$a_{i,j} \in [\underline{a}_{i,j}, \bar{a}_{i,j}] \quad \forall (i, j) \in (\{1 \dots n\} \times \{1 \dots m\}) \quad (2.33)$$

gegeben, dann erhält man eine Beschreibung der ungenau bestimmten Matrix durch eine Intervallmatrix:

Definition 1 (*Intervallmatrix*)

Eine *Intervallmatrix*

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} [\underline{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,1}] & [\underline{a}_{1,2}, \bar{a}_{1,2}] & \dots & [\underline{a}_{1,m}, \bar{a}_{1,m}] \\ [\underline{a}_{2,1}, \bar{a}_{2,1}] & [\underline{a}_{2,2}, \bar{a}_{2,2}] & \dots & \\ \vdots & & & \\ [\underline{a}_{n,1}, \bar{a}_{n,1}] & & \dots & [\underline{a}_{n,m}, \bar{a}_{n,m}] \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

ist gegeben durch

$$[\mathbf{A}] := \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{[n \times m]} \mid a_{i,j} \in [\underline{a}_{i,j}, \bar{a}_{i,j}] \quad \forall (i, j) \in (\{1 \dots n\} \times \{1 \dots m\}) \right\}. \quad (2.35)$$

Damit beschreibt die Intervallmatrix die Menge aller Matrizen, deren Parameter in abgeschlossenen Intervallen liegen. Die Parameter sind voneinander unabhängig, d.h. alle Kombinationen von Parametern aus den gegebenen Intervallen sind zugelassen. Im Parameterraum werden damit achsenparallele Quader beschrieben.

Intervallmatrizen sind die einfachste und konservativste Möglichkeit, unsichere Parameter zu beschreiben. Es werden bis zu $m \cdot n$ unabhängige Elemente im Parametervektor durch Bildung der Maxima und Minima aller einzelner Parameter von $\mathbf{A}(\mathbf{s})$ ermittelt, so dass man die Matrix $[\mathbf{A}] \supseteq \mathbf{A}(\mathbf{s})$ erhält. Die Intervallmatrix wird nicht unmittelbar in den Methoden der Zustandsmengenbeobachtung verwendet, sondern hier als Spezialfall der *Strukturierten Beschreibung* und der *Polytopen Beschreibung* eingeführt. Die Umwandlung in die jeweilige Darstellung wird in den folgenden Abschnitten kurz gezeigt.

2.4.2. Strukturierte Beschreibung

Hier soll die *Strukturierte Beschreibung* für unsichere Parameter eingeführt werden, die eine explizite Berücksichtigung linearer Abhängigkeiten zwischen den Parametern erlaubt.

Definition 2 (*Strukturierte Beschreibung*)

Eine *Strukturierte Beschreibung* von unsicheren Parametern einer Matrix $\mathbf{A}_S(\mathbf{p})$ ist gegeben durch die Menge der Matrizen

$$\mathbf{A}_S(\mathbf{p}) := \left\{ \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^{N_{SB}} p_j \mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{[n \times m]} \mid \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \right\}, \quad (2.36)$$

wobei $[\mathbf{p}]$ ein Intervallvektor der Dimension N_{SB} ist.

Die Matrix \mathbf{A}_0 in Gl. (2.36) wird als nominelle Matrix bezeichnet, wenn sie die physikalisch zu erwartende Systembeschreibung darstellt. Mathematisch kann sie beliebig gewählt werden und damit insbesondere auch so, dass sie selbst gar kein Element von $\mathbf{A}_S(\mathbf{p})$ ist.

Normierte Darstellung. Aufgrund der fehlenden Eindeutigkeit der Darstellung (2.36) bietet sich eine normierte Darstellung an. Diese ergibt sich, wenn man fordert, dass

$$[\check{p}_j, \bar{p}_j] = [-1, 1] \quad \forall j \in \{1 \dots N_{SB}\}, \quad (2.37)$$

also die Unsicherheit durch den Einheitsintervallvektor $[\mathbf{i}] \ni \check{\mathbf{p}}$ der Dimension N_{SB} charakterisiert wird. Man erhält aus der Transformation

$$\check{p}_j = \frac{p_j - \text{mid}[p_j]}{\text{rad}[p_j]} \quad (2.38)$$

mit den Intervalloperatoren nach Gl.(B.2) und Gl. (B.3)

$$\mathbf{A}_S(\check{\mathbf{p}}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^{N_{SB}} (\check{p}_j \text{rad}[p_j] + \text{mid}[p_j]) \mathbf{A}_j \quad (2.39)$$

$$= \underbrace{\mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^{N_p SB} \text{mid}[p_j] \mathbf{A}_j}_{\check{\mathbf{A}}_0} + \sum_{j=1}^{N_{SB}} \check{p}_j \underbrace{\text{rad}[p_j] \mathbf{A}_j}_{\check{\mathbf{A}}_j} \quad (2.40)$$

Mit der Matrix \mathbf{A}_0 als Zentrum und den \mathbf{A}_j als Generatoren bildet die *Strukturierte Beschreibung* ein Zonotop im Parameterraum (vgl. Anhang A, Gl. (A.59)). Es handelt sich damit um einen Spezialfall der *Polytopen Beschreibung*.

Intervallmatrix. Die Darstellung von Unsicherheiten in Matrixparametern durch *Strukturierte Beschreibung* ist allgemeiner, als die Darstellung durch Intervallmatrizen. Die Intervallmatrix kann als Spezialfall der *Strukturierten Beschreibung* aufgefasst werden. Wird jeder ungenau bekannte Parameter $a_{i,j}$ durch eine Matrix \mathbf{A}_k repräsentiert,

in welcher nur genau dieses Element in \mathbf{A}_k von null verschieden ist, erhält man eine *Strukturierte Beschreibung*

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] &= \mathbf{A}_0 + [\underline{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,1}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} + \dots + [\underline{a}_{n,m}, \bar{a}_{n,m}] \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A}_S(\mathbf{a}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

und kann in die Matrix \mathbf{A}_0 exakt bekannte Parameter aufnehmen. Die normierte Form der *Strukturierten Beschreibung* erhält man, wenn man für jeden Parameter der Intervallmatrix die Umformung

$$[a_{i,j}] = \text{mid}[a_{i,j}] + \text{rad}[a_{i,j}] \frac{[a_{i,j}] - \text{mid}[a_{i,j}]}{\text{rad}[a_{i,j}]} \quad (2.42)$$

durchführt:

$$\mathbf{A}_S(\check{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} \text{mid}[a_{1,1}] & \dots & \text{mid}[a_{1,m}] \\ \text{mid}[a_{2,1}] & \dots & \\ \vdots & & \vdots \\ \text{mid}[a_{n,1}] & \dots & \text{mid}[a_{n,m}] \end{pmatrix} + \check{p}_1 \begin{pmatrix} \text{rad}[a_{1,1}] & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$$+ \check{p}_2 \begin{pmatrix} 0 & \text{rad}[a_{1,2}] & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}, \check{p}_i \in [-1, 1] \dots \quad (2.44)$$

2.4.3. Polytope Beschreibung

Eine allgemeinere Systemklasse als durch die *Strukturierte Beschreibung* unsicherer Parameter nach Abschn. 2.4.2 ist durch polytope Systeme gegeben [Ack93], [CGTV07]. Hier werden die Parameterunsicherheiten durch konvexe Polytope im Parameterraum beschrieben. Im Unterschied zur Beschreibung durch Ungleichungen (A.5) (\mathcal{H} -Darstellung), die für Zustands- und Signalgrößen verwendet wird, werden Parameterunsicherheiten in den Matrizen polytoper Systeme üblicherweise in baryzentrischen Koordinaten p_j (\mathcal{V} -Darstellung, siehe Gl. (A.2)) angegeben. Diese Form wird hier als *Polytope Beschreibung* bezeichnet:

Definition 3 (Polytope Beschreibung)

Eine *Polytope Beschreibung* der Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ mit unsicherem Parametervektor \mathbf{p} ist gegeben durch

$$\mathbf{A}_P(\mathbf{p}) := \left\{ \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{N_{PB}} p_j \mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{[n \times m]} \mid \sum_j p_j = 1, p_j \geq 0 \forall j \in \{1, \dots, N_{PB}\} \right\}, \quad (2.45)$$

Die Matrizen \mathbf{A}_j beschreiben Eckpunkte eines Polytops im Parameterraum, welche affin kombiniert werden unter der Nebenbedingung

$$\sum_j^{N_{PB}} p_j = 1, \quad (2.46)$$

vgl. (A.3) für \mathcal{V} -Polytope im Zustandsraum. Mit Hilfe dieser Darstellung können konvexe Gebiete im Parameterraum prinzipiell beliebig genau beschrieben werden, allerdings im Allgemeinen nur auf Kosten einer wachsenden Dimension N_{PB} des Polytops.

Aus der Intervallmatrix mit N unsicheren Parametern lässt sich die *Polytope Beschreibung* trivialerweise angeben als die $N_{PB} = 2^N$ Kombinationen aller Matrizen mit der oberen Grenze $\bar{a}_{i,j}$ und der unteren Grenze $\underline{a}_{i,j}$.

2.5. Modelle für die Zustandsmengenbeobachtung

Die in diesem Kapitel bisher vorgestellten Modelleigenschaften sollen in einer Modellschreibweise \mathcal{M} zusammengefasst werden. Im Allgemeinen ist mindestens eine Beschreibung der Systemdynamik und ein Modell der Signalschranken erforderlich: $\mathcal{M} = \{\text{Systemdynamik, Signalschranken}\}$. Diese Schreibweise ermöglicht eine übersichtliche Darstellung, welche Voraussetzungen das Modell erfüllen muss, um die Methoden der Zustandsmengenbeobachtung anzuwenden.

Für das folgende Modell kann eine Zustandsmengenbeobachtung durchgeführt werden, auch wenn keine Information über den Anfangszustand $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ vorliegt:

$$\mathcal{M} = \{LDPV_{[ABE](p), \mathbb{R}^n, CDF}, \{\mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{D}\}\} \quad (2.47)$$

bzw.

$$\mathcal{M} = \{LDPV_{[ABE](p), \mathbb{R}^n, CDF}, \{[e]_u, [e]_y, [e]_d\}\}. \quad (2.48)$$

Das *LDPV*-System berücksichtigt Störungen und erfordert deshalb Angaben über die Schranken der Ein- und Ausgangssignale. Methoden zur Handhabung von unsicheren Parametern in der Zustandsübergangsgleichung stehen zur Verfügung, wenn diese in Form von *Strukturierter Beschreibung* oder *Polytope Beschreibung* vorliegen. Das System lässt sich dann auf die Form

$$\mathcal{M}_S = \{LDPV_{[AB](p), CD}, [p], \mathbb{R}^n, \{\mathcal{U}, \mathcal{Y}\}\} \quad (2.49)$$

bzw.

$$\mathcal{M}_P = \{LDPV_{[AB](p), CD}, \mathcal{P}, \mathbb{R}^n, \{\mathcal{U}, \mathcal{Y}\}\} \quad (2.50)$$

bringen, was Voraussetzung für die hier beschriebenen Methoden ist. Eine Beschreibung durch Intervallmatrizen \mathcal{M}_I ist als Sonderfall dieser Modelle möglich.

Wie sich zeigt, stellen Parameterunsicherheiten in der Ausgabematrix methodisch kein Problem dar, wenn eine beschränkte Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0 vorliegt:

$$\mathcal{M}_* = \{LDPV_{[ABCD](p), *}, \mathcal{X}_0, \{\mathcal{U}, \mathcal{Y}\}\} \quad (2.51)$$

Ein anwendbares Modell zu ermitteln, gelingt auch dann, wenn ein Störmodell mit entsprechenden Signalschranken vorliegt:

$$\mathcal{M} = \{LDPV_{[ABE](p),CDF}, \{\mathcal{D} - LDTI, \{\Delta\mathcal{X}, \Delta\mathcal{Y}\}\}, \mathcal{X}_0, \{\mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{D}\}\} \quad (2.52)$$

Alle Elemente der Modellbeschreibung können aus Sicht der Beobachtungsaufgabe zeitlich variieren, also $\mathcal{M}(k) = \{LDPV(k), \mathcal{P}(k), \{\mathcal{U}(k), \mathcal{Y}(k)\}\}$, ohne das prinzipielle Probleme für die Zustandsmengenbeobachtung auftreten. Zur Vereinfachung der Darstellung soll diese Möglichkeit im Folgenden nicht explizit angegeben werden. Mit $\mathcal{M}_0 = \{LDTI_{\{A_0, B_0, C_0, D_0\}}, * \dots\}$ wird gelgentlich das nominelle System bezeichnet.

$\mathcal{M}_0 = \{LDTI_{\{A_0, B_0, C_0, D_0\}}\}$ bezeichnet das nominelle System ohne Messfehler.

3. Modellermittlung

3.1. Physikalische Modellierung

Die physikalische Beschreibung technischer Systeme führt zumeist auf Systeme kontinuierlicher Differentialgleichungen, welche zu Zustandsraummodellen zusammengefasst werden können. In diesem Bericht werden lineare dynamische Systeme betrachtet, deren physikalische Parameter im Allgemeinen nur ungenau bekannt sind und deshalb durch Mengen beschrieben werden. Die ungenau bekannten oder zeitveränderlichen, wahren Parameter sind durch Mengen $\mathbf{s}^*(k) \in \mathcal{S}$ gegeben, wobei eine endliche Anzahl zusammenhängender Intervalle, repräsentiert durch den Intervallvektor $[\mathbf{s}]$, zumeist ausreichend ist.

Lineares Zustandsraummodell. Ein Grund für das Entstehen unsicherer Parameter kann die Linearisierung des Modells um einen Arbeitspunkt sein. In diesem Arbeitspunkt wird das System durch die nominellen Parameter \mathbf{s}_0 beschrieben. Abweichungen vom Arbeitspunkt können dann durch Parametermengen berücksichtigt werden. Allgemeiner wird der Ansatz als Modellabsorption bezeichnet [BM08](S.31). Die Ableitung der linearen Systemform ist für die hier behandelten Methoden zwingend erforderlich.

Als Ergebnis der Modellbildung und Linearisierung erhält man zeitkontinuierliche Systeme von Differenzialgleichungen der Form:

$$\mathcal{M}_{c,v} : \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_c \mathbf{d}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_c \mathbf{d}(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Darin bezeichnet $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ den kontinuierlichen Zustand über der Zeit t , \mathbf{x}_0 den Anfangszustand $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ist der messbare Eingang, $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^q$ ein unbekannter Störeingang und $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ das Messsignal. Die physikalischen Parameter finden im Allgemeinen Eingang in die Systemmatrix $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{[n \times n]}$, die Eingangsmatrix $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{[n \times m]}$, die Ausgabematrix $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{[r \times n]}$ und die Störeingangsmatrix $\mathbf{E}_c \in \mathbb{R}^{[n \times q]}$. Direkter Durchgriff auf den Ausgang vom Eingang und Störeingang wird durch die Matrizen $\mathbf{D}_c, \mathbf{F}_c$ beschrieben.

Unsichere Parameter. Bei der Modellbildung und Linearisierung treten häufig Abhängigkeiten zwischen den Matrixparametern auf, beispielweise weil unsichere physikalische Parameter s_i in mehreren Matrixparametern Eingang finden. Stellvertretend für die Matrizen des Zustandsraummodells (3.1) soll die Formulierung von Parameterunsicherheiten anhand der Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{s})$ durchgeführt werden, die deshalb zunächst von der Dimension $[n \times m]$ sein kann. Die durch den Vektor

$$\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_z]^T \in [\mathbf{s}] \quad (3.2)$$

mit $s_i \in [\underline{s}_i, \bar{s}_i] \quad \forall i \in \{1, \dots, z\}$ beschriebenen Parameterunsicherheiten liegen in den Matrizen in sehr allgemeiner Form als funktionale Abhängigkeiten

$$\mathbf{A}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(\mathbf{s}) & f_{1,2}(\mathbf{s}) & \dots \\ f_{2,1}(\mathbf{s}) & f_{2,2}(\mathbf{s}) & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

vor, in welchen die ungenau bekannten Matrixparameter beliebige Mengen im Parameterraum darstellen können. Auf ungenau bekannte Modelle

$$\mathcal{M}(\mathbf{s}) := \{\{\mathbf{A}(\mathbf{s}), \mathbf{B}(\mathbf{s}), \mathbf{C}(\mathbf{s}), \mathbf{D}(\mathbf{s})\}, \mathbf{s} \in [\mathbf{s}]\}. \quad (3.4)$$

mit beliebiger Beschreibung der Parametervariation \mathbf{s} können Methoden der Zustandsmengenbeobachtung nicht direkt angewendet werden.

3.2. Ermittlung vollständiger Modelle

In der Literatur wird die Vollständigkeit von Modellen $\mathcal{M}_v \supseteq \mathcal{M}$ über ihr E/A-Verhalten definiert [Pla06], [Sch03]. Das bedeutet, dass für jede zulässige Eingangsfolge die vom Modell \mathcal{M} erzeugbaren Ausgangsfolgen auch vom Modell \mathcal{M}_v mit der selben Eingangsfolge erzeugt werden können.

In Zusammenhang mit der Zustandsbeobachtung ist aber eine Definition bezüglich der Zustandsfolge sinnvoller. Dazu wird das Modell \mathcal{M} betrachtet, welches eine Menge von Anfangszuständen \mathcal{X}_0 und eine ungenau bekannte Eingangsfolge $\mathcal{U}(k)$ auf eine Menge von Zustands-/Ausgangsfolgen abbildet:

$$\mathcal{M} : (\mathbf{x}_0, \{\mathbf{u}(k)\}) \longrightarrow \{\mathcal{X}(k), \mathcal{Y}(k)\}. \quad (3.5)$$

Definition 4 (*Vollständiges Modell*)

Ein Modell \mathcal{M}_v heißt vollständig bezüglich \mathcal{M} , kurz $\mathcal{M}_v \supseteq \mathcal{M}$, wenn $\mathcal{X}_{v,0} \supseteq \mathcal{X}_0$ gilt und wenn es für jede Zustands-/Eingangsfolge eine Zustands-/Ausgangsfolge

$$\mathcal{M}_v : (\mathbf{x}_0, \{\mathbf{u}(k)\}) \longrightarrow \{\mathcal{X}_v(k), \mathcal{Y}_v(k)\} \quad (3.6)$$

erzeugt, so dass gilt

$$\{\mathcal{X}(k), \mathcal{Y}(k)\} \subseteq \{\mathcal{X}_v(k), \mathcal{Y}_v(k)\} \quad \forall k. \quad (3.7)$$

Die Definition beinhaltet den Spezialfall der Vollständigkeit bezüglich des Modells \mathcal{M}_0 ohne Unsicherheiten:

$$\mathcal{M}_v \supseteq \mathcal{M}_0 : (\mathbf{x}_0, \{\mathbf{u}(k)\}) \longrightarrow \{\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k)\} \quad (3.8)$$

$$\implies \mathcal{M}_v : (\mathbf{x}_0, \{\mathbf{u}(k)\}) \longrightarrow \{\mathcal{X}_v(k), \mathcal{Y}_v(k)\} \ni \{\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k)\} \quad \forall k \quad (3.9)$$

Es lässt sich leicht verifizieren, dass das Ersetzen eines Elements der Modellbeschreibung durch eine Einschließung immer auf ein vollständiges Modell führt:

$$[\mathbf{e}]_{v,u} \supseteq [\mathbf{e}]_u \longrightarrow \mathcal{M}_v = \{*, *, [\mathbf{e}]_{v,u}, *\} \supseteq \mathcal{M} = \{*, *, [\mathbf{e}]_u, *\} \quad (3.10)$$

Darin sind alle durch das *-Symbol ersetzten Elemente in beiden Modellen identisch. Unter anderem gilt

$$[\mathbf{e}]_{v,y} \supseteq [\mathbf{e}]_y \longrightarrow \mathcal{M}_v = \{*, *, *, [\mathbf{e}]_{v,y}\} \supseteq \mathcal{M} = \{*, *, *, [\mathbf{e}]_y\}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{A}_v(\mathbf{p}) \supseteq \mathbf{A}(\mathbf{p}) \longrightarrow \mathcal{M}_v = \{\{\mathbf{A}_v(\mathbf{p}), \dots, *\}, *, *, *\} \supseteq \mathcal{M} = \{\{\mathbf{A}(\mathbf{p}), \dots, *\}, *, *, *\}. \quad (3.12)$$

Im Folgenden wird hier davon ausgegangen, dass ein Modell

$$\mathcal{M}(\mathbf{s}) = \{\{\mathbf{A}(\mathbf{s}), \mathbf{B}(\mathbf{s}), \mathbf{C}(\mathbf{s}), \mathbf{D}(\mathbf{s})\}, \mathcal{X}_0, \mathbf{s} \in \mathcal{S}, [e]_u, [e]_y\} \quad (3.13)$$

vorliegt und vollständig ist bezüglich des realen Prozesses: $\mathcal{M}(\mathbf{s}) \subseteq \mathcal{M}_r$. Dann ist als Zielstellung die Ableitung vollständiger Modelle gegeben, wobei strukturelle Einschränkungen bezüglich der Beschreibung der ungenau bekannten Parameter gemacht werden. Die geringe Komplexität der Beschreibung durch Zonotope oder Polytope $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ ermöglicht es, für die im Folgenden eingeführten Modellformen allgemeingültige Methoden zur Zustandsmengenbeobachtung anzugeben. Die Vollständigkeit des abgeleiteten Modells $\mathcal{M}(\mathbf{p})$ ist dann z.B. gewährleistet, wenn für alle Matrizen

$$\{\mathbf{A}(\mathbf{s}) \mid \mathbf{s} \in \mathcal{S}\} \subseteq \{\mathbf{A}(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in \mathcal{P}\} \quad (3.14)$$

gilt.

Intervallmatrizen. Im einfachsten Fall werden vollständige Modelle für unsichere Parameter durch Bildung von Intervallmatrizen $[\mathbf{A}]$ nach Abschn. 2.4.1 abgeleitet. Dazu werden die Parameter der Matrix (3.3) durch Schranken

$$\underline{a}_{i,j} = \min_{\mathbf{s}} f_{i,j}(\mathbf{s}) \quad (3.15)$$

und

$$\bar{a}_{i,j} = \max_{\mathbf{s}} f_{i,j}(\mathbf{s}) \quad (3.16)$$

ersetzt, in denen die einzelnen Parameter garantiert liegen. Durchgeführt führt alle Matrizen erhält man $\mathcal{M}_I \supseteq \mathcal{M}(\mathbf{s})$. Diese Beschreibung ist vollständig, im Allgemeinen aber konservativ, da sie die Parameter von $\mathcal{M}(\mathbf{s})$ im Parameterraum in achsenparallelen Quadern einschließt.

Strukturierte Beschreibung. In Abschnitt 2.4.2 wird eine Intervallmatrix in die äquivalente *Strukturierte Beschreibung* $\mathbf{A}(\mathbf{p}) = [\mathbf{A}]$ überführt, womit die Qualität der Einschließung natürlich nicht verbessert wird. Im Unterschied dazu soll jetzt eine weniger konservative *Strukturierte Beschreibung* gefunden werden, indem ausgenutzt wird, dass mehrere Einträge $f_k(s)$ einer Matrix $\mathbf{A}(s)$ sich auf dem skalaren Intervall $s \in [\underline{s}; \bar{s}]$ ähnlich entwickeln (z.B. wenn mehrere Parameter $[\mathbf{s}]$ monoton wachsen).

Die Prozedur besteht aus mehreren Skalierungen der Funktionen $f_k(s)$, welche im folgenden angegeben werden. Darin tauchen die Operatoren zur Bestimmung des Mittelpunktes (B.2) und Radius (B.3) von Intervallen auf, welche in Anhang B erklärt sind. Diese Schritte sind für alle k Funktionen auszuführen, weshalb der Index weggelassen wird. Zwei solcher Funktionen sind in Abb. 3.1 für diese Schritte dargestellt:

1. Die Skalierung der Funktion auf den Definitionsbereich $s^* \in [-1, 1]$ wird mit der Transformation (2.38)

$$s^* = \frac{s - \text{mid}[s]}{\text{rad}[s]} \iff s = \text{mid}[s] + \text{rad}[s]s^* \text{ mit } s^* \in [-1, 1] \quad (3.17)$$

durchgeführt. Ergebnis ist eine Funktion $\check{f}(s^*) = f(s)$ mit identischem Wertebereich.

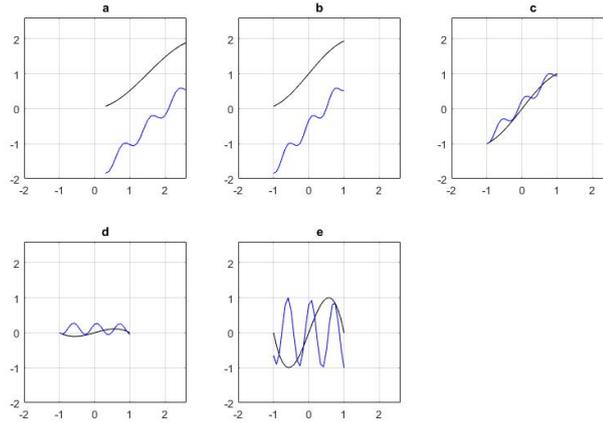


Bild 3.1: Verlauf unsicherer Matrixparameter bei Normierungsschritten: a) $f_{1,2}(s)$, b) $\hat{f}_{1,2}(s^*)$, c) $f_{1,2}^*(s^*)$, d) $\hat{f}_{1,2}(s^*)$, e) $\tilde{f}_{1,2}(s^*)$

2. Skaliert man nun den (bisher unveränderten) Wertebereich mit

$$f^*(s^*) = \frac{f(s) - \text{mid}[f]}{\text{rad}[f]}, \quad (3.18)$$

dann gilt $f^* \in [-1, 1]$.

3. Um gemeinsames Monotonieverhalten auf dem Parameterbereich zu betrachten, wird die Funktion

$$\hat{f}(s^*) = f^*(s^*) \mp s^* \quad (3.19)$$

betrachtet, wobei das Minuszeichen verwendet wird, wenn die Funktion zumindest tendenziell wächst mit s^* .

4. Die Differenzfunktion $\hat{f}(s^*)$ wird erneut skaliert:

$$\tilde{f}(s^*) = \frac{\hat{f}(s^*) - \text{mid}[\hat{f}]}{\text{rad}[\hat{f}]} \Rightarrow \tilde{f} \in [-1, 1] \quad (3.20)$$

Was man durch diese Vorgehensweise gewonnen hat, erkennt man dann, wenn man mit dem Index $k \hat{=} i, j$ die Darstellung von $f_k(s)$ durch Rückwärtseinsetzen in Schritt 2 ermittelt:

$$f_k(s) = \text{mid}[f_k] + \text{rad}[f_k] f_k^*(s^*) \quad (3.21)$$

$$= \text{mid}[f_k] + \text{rad}[f_k] (\hat{f}_k(s^*) \pm s^*) \quad (3.22)$$

$$= \underbrace{\text{mid}[f_k] + \text{rad}[f_k] \text{mid}[\hat{f}_k]}_{a_{0,i,j}} \pm \text{rad}[f_k] s^* + \underbrace{\text{rad}[f_k] \text{rad}[\hat{f}_k]}_{r_{i,j}} \tilde{f}_k(s^*) \quad (3.23)$$

mit $s^* \in [-1; 1]$ und $\hat{f}^* \in [-1; 1]$. Über den Parameter s^* können nun mehrere Matrixeinträge kollektiv eingeschlossen werden (formuliert durch den Parameter p_1) während

die Abweichungen von dieser Tendenz individuell durch \tilde{f}^* eingeschlossen werden:

$$\mathbf{A}(s) \in \begin{pmatrix} a_{0,11} & a_{0,12} & \dots \\ a_{0,21} & a_{0,22} & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} \text{rad}[f_{1,1}] & \text{rad}[f_{1,2}] & \dots \\ \text{rad}[f_{2,1}] & \text{rad}[f_{2,2}] & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$+ p_2 \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ r_{2,1} & 0 & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} + p_4 \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \dots \quad (3.25)$$

Beispiel 3.1: Ableitung vollständiger Modelle.

Gegeben sei die quadratische Systemmatrix mit

$$\mathbf{A}(s) = \begin{pmatrix} -s & 1 \\ 0 & -s^2 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

wobei der Parameter s unbekannt ist, aber gesichert im Intervall $s \in [1, 3]$ liegt. Das exakte Modell ist durch

$$\mathcal{M}(s) = \{(\mathbf{A}(s), \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}), s \in [1, 3], *, *, *\} \quad (3.27)$$

gegeben mit dem unsicheren Parameter in der Matrix $\mathbf{A}(s)$ des linearen zeitdiskreten Zustandsraummodells. Man erhält unmittelbar die Intervallmatrix

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} -[1, 3] & 1 \\ 0 & -[1, 9] \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

für die gilt

$$\mathbf{A}(s) \in [\mathbf{A}] \quad \forall s \in [1, 3]. \quad (3.29)$$

Damit ist das durch

$$\mathcal{M}_I = (\{[\mathbf{A}], \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}\}, *, *, *) \quad (3.30)$$

gegebene System vollständig:

$$\mathcal{M}(s) \subseteq \mathcal{M}_I \quad (3.31)$$

Jetzt soll ein vollständiges Modell ermittelt werden unter Verwendung der *Strukturierten Beschreibung* von Parameterunsicherheiten. Diese soll weniger konservativ sein, d.h. eine bessere Einschließung der Parameter von $\mathcal{M}(s)$ liefern. Dazu werden die Verläufe der unbestimmten Systemparameter $a_{1,1}$ und $a_{2,2}$ als Funktionen des ungenau bekannten Parameters s in Abb. 3.2 (links) dargestellt. Durch Subtraktion der Intervallmittelwerte $\text{mid}[a_{1,1}]$ und $\text{mid}[a_{2,2}]$, erhält man die in Abb. 3.2 (mitte) rot dargestellten, ursprungssymmetrischen Intervalle. Die auf das Intervall $[-1, 1]$ mit dem Intervallradius $\text{rad}[a_{i,i}]$ skalierten Intervalle sind in Abb. 3.2 (rechts) dargestellt und beide monoton fallend. Nun kann noch die Differenz des

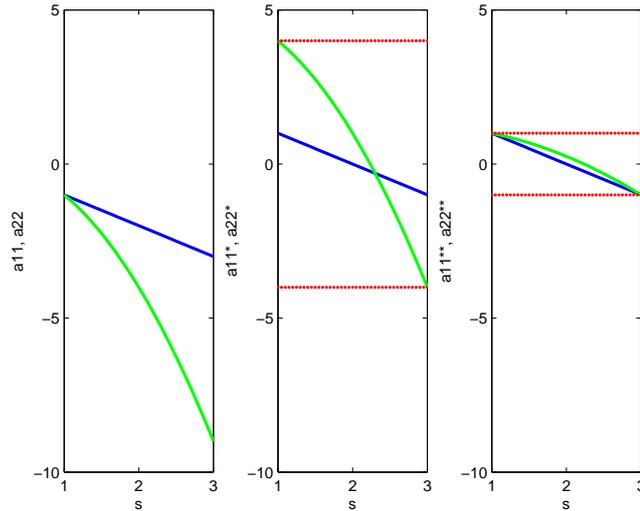


Bild 3.2: Verlauf der unsicheren Matrixparameter von $\mathbf{A}(s)$

Funktionenverlaufs zur linearen Funktion durch eine Matrix mit dem Vorfaktor p_2 berücksichtigt werden, was hier nur für den Parameter $a_{2,2}$ notwendig ist. Die Funktion $\hat{f}_{1,1}$ verschwindet und damit auch $\tilde{f}_{1,1} \equiv 0$. Nach erneuter Zentrierung um den linearen Verlauf erhält man eine Matrix mit nur einem Element $a_{2,2}$ und damit die folgende normierte Beschreibung,

$$\mathbf{A}_{S,1}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + p_1 \mathbf{A}_1 + p_2 \mathbf{A}_2 \quad (3.32)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -5 + 0.5 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\text{mit } p_j \in [-1, 1] \text{ für } j \in \{1, 2\},$$

wobei sich die Matrix \mathbf{A}_0 aus den beiden Anteilen der jeweiligen Zentrierung der Intervalle sowie aus den exakten Parametern zusammensetzt und die Matrix \mathbf{A}_1 die Skalierungsfaktoren enthält. Abb. 3.3 dient dem Vergleich der Beschreibungsformen, indem die zulässigen Parameterkombinationen der jeweiligen Beschreibung im Parameterraum gezeigt wird. Die rote Kurve stellt die exakte Beschreibung durch die Matrix $\mathbf{A}(s)$ nach Gleichung (3.26) dar. Die *Strukturierte Beschreibung* nach (3.32) lässt Parameterkombinationen aus dem in schwarze dargestellten Polytop zu. Die Bildung der Intervallmatrix ist in dem Sinne konservativ, als dass alle Parameter im gezeigten Rechteck erfasst werden. Beide Matrizen führen auf vollständige Modelle bezüglich der Originalmatrix (3.26), da

$$\mathcal{M}(s) \subset \mathcal{M}_{S,1}(\mathbf{p}) = \{\{\mathbf{A}_{S,1}(\mathbf{p}), \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}, *, *, *, *\}. \quad (3.34)$$

Allerdings gilt für die abgeleiteten Beschreibungen $\mathcal{M}_{S,1}(\mathbf{p}) \not\subseteq \mathcal{M}_I$.

Jetzt soll ein vollständiges Modell für das System $\mathcal{M}(s)$ mittels *Strukturierter Beschreibung* so gewählt werden, dass gilt:

$$\mathcal{M}_{S,2}(\mathbf{p}) = \{\{\mathbf{A}_{S,2}(\mathbf{p}), \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}, *, *, *, *\}. \subset \mathcal{M}_I. \quad (3.35)$$

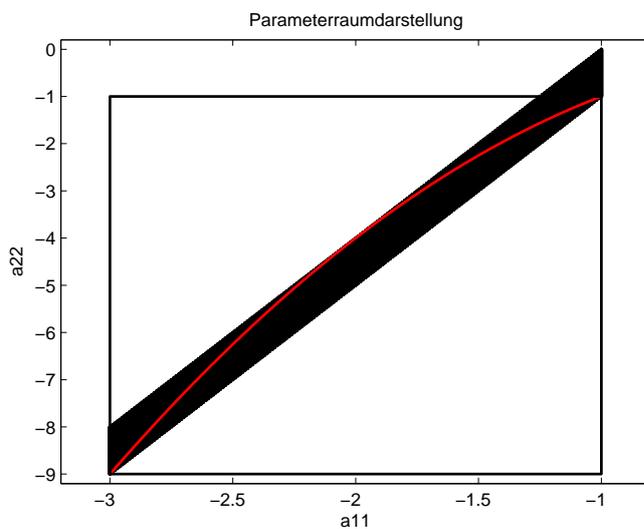


Bild 3.3: Vergleich des Originalsystems mit Intervallmatrix und *Strukturierter Beschreibung*

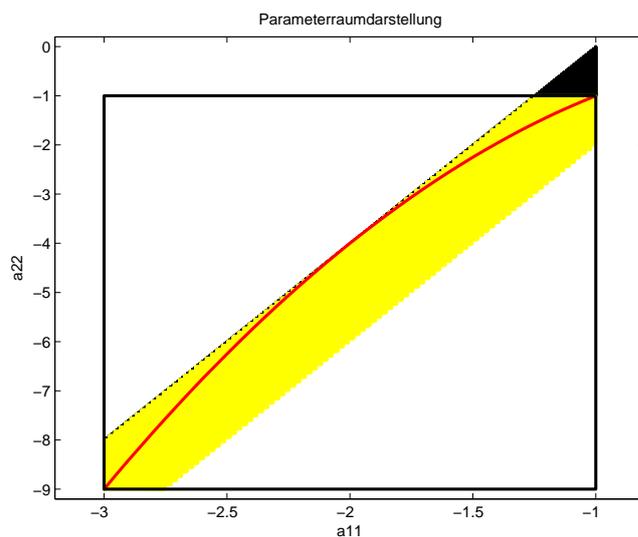


Bild 3.4: Vergleich des Originalsystems, der Intervallmatrix und der *Strukturierte Beschreibungen* $\mathcal{M}_{S,1}(\mathbf{p})$ (schwarz) und $\mathcal{M}_{S,2}(\mathbf{p})$ (gelb)

Nach Betrachtung der Abb. 3.3 gelingt dies durch das Einführen einer neuen Kante parallel zur $a_{1,1}$ -Achse. Die neue Darstellung ist durch

$$\mathbf{A}_{S,2}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + p_1 \mathbf{A}_1 + p_2 \mathbf{A}_2 + p_3 \mathbf{A}_3 \quad (3.36)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0.875 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 0.125 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

mit $p_j \in [-1, 1]$ für $j \in \{1, 2, 3\}$,

gegeben und führt auf das in Abb. 3.4 gelb dargestellte Zonotop. \square

Polytope Beschreibung. Durch Angabe der Eckpunkte \mathbf{A}_j eines Polytops im Parameterraum charakterisiert man die *Polytope Beschreibung* in \mathcal{V} -Darstellung nach Abschn. 2.4.3 und sucht zur Ermittlung eines vollständigen Modells

$$\mathbf{A}_P(\mathbf{p}) \supseteq \mathbf{A}(\mathbf{s}). \quad (3.38)$$

Es kann keine exakte Vorgehensweise angegeben werden, um die Matrizen \mathbf{A}_j zu ermitteln, so dass (3.38) erfüllt ist. Wenn maximal drei Parameter betroffen sind, ist eine grafische Darstellung im Parameterraum möglich. Diese führt auf günstige Einschließungsrichtungen, also Orientierungen der Kanten oder Ebenen, welche die unsicheren Parameter möglichen günstig einschließen. Im Allgemeinen muss man diese Richtungen wählen (oder ausprobieren).

Im Parameterraum sei der Spaltenvektor \mathbf{a} die Aneinanderreihung der unsicheren Parameter in $\mathbf{A}(\mathbf{s})$, beispielsweise

$$\mathbf{a} = (a_{1,1}, \dots, a_{n,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,2}, \dots, a_{n,n})^T \quad (3.39)$$

und hat man eine günstige Richtung \mathbf{n}_p zur Einschließung gewählt, dann liefert das folgende Optimierungsproblem die minimale Einschließung in dieser Richtung:

$$b_p = \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in \mathcal{S}} \mathbf{n}_p^T \cdot \mathbf{a} \quad (3.40)$$

Wählt man N_p solcher Richtungen, dann beschreiben die Gleichungen

$$\mathbf{n}_{i,p}^T \cdot \mathbf{a} \leq b_{i,p}, \quad 0 < i \leq N_p \quad (3.41)$$

als \mathcal{H} -Darstellung ein Polyeder im Parameterraum (A.5). Da die Menge der Parameter in der Regel beschränkt ist, ist eine Umwandlung in ein \mathcal{V} -Polytop (A.2) mit Algorithmen möglich, auf die in Anhang A verwiesen wird:

$$N_p \cdot \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \longmapsto \mathbf{a}_j \quad (3.42)$$

Die Eckpunkte des \mathcal{V} -Polytops auf Matrixschreibweise \mathbf{A}_j nach (3.39) gebracht, ergeben die gesuchte Darstellung.

Beispiel 3.2: Fortsetzung von Beispiel 3.1.

Jetzt soll ein vollständiges Modell für das System \mathcal{M}_0 mittels *Polytope Beschreibung* der Unsicherheiten in der Matrix (3.26) angegeben werden. In Abb. 3.5 wird die Parameterunsicherheit durch das blaue Polytop darge-

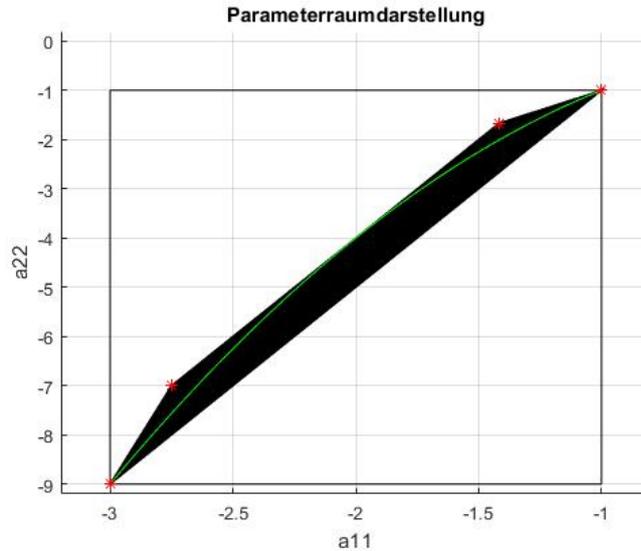


Bild 3.5: Polytope Einschließung von ungenau bekannten Parametern mit vier Eckpunkten

stellt. Es lässt sich durch die Angabe der vier Eckpunkte beschreiben, was auf die folgende Darstellung führt:

$$\mathbf{A}_P(\mathbf{p}) = p_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} -1.375 & 1 \\ 0 & -1.5 \end{pmatrix} + p_4 \begin{pmatrix} -2.5 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\text{mit } \sum_{j=1}^4 p_j = 1, p_j \geq 0 \quad \forall j$$

Bezüglich der Fläche im Parameterraum ist die Einschließung der zulässigen Parameter besser, als die durch die *Strukturierte Beschreibung* in Beispiel 3.1 bis 3.4 gegebene Einschließung. Unter Inkaufnahme der wachsenden Komplexität der Beschreibung kann die Menge zulässiger Parameter noch besser eingeschlossen werden, wie in Abb. 3.6 für $N_{PB} = 6$ gezeigt. Die konvexe Hülle der zulässigen Parameter kann beliebig genau approximiert werden. \square

Die Aufgabe, eine zweckmäßige Einschließung möglicher Parameter im Parameterraum zu finden, ist natürlich vom betrachteten System abhängig. So beeinflussen manche Bereiche im Parameterraum die Qualität der Prädiktion besonders stark. Umfasst ein vollständiges Modell beispielsweise Parameterbereiche, für die das System instabil ist, so kann dass zu einer starken Expansion der prädizierten Mengen führen und eine möglichst gute Approximation des realen Modells durch das vollständige Modell ist anzustreben. Der Einfluss von Parametern, weit entfernt von der Stabilitätsgrenze im Parameterraum, ist möglicherweise zu vernachlässigen.

3.3. Diskretisierung

Gelingt aus den physikalischen Zusammenhängen die Formulierung von kontinuierlichen Zustandsraummodellen mit Polytope Parameterunsicherheit $\mathbf{A}_P(\mathbf{p})$, so bleibt

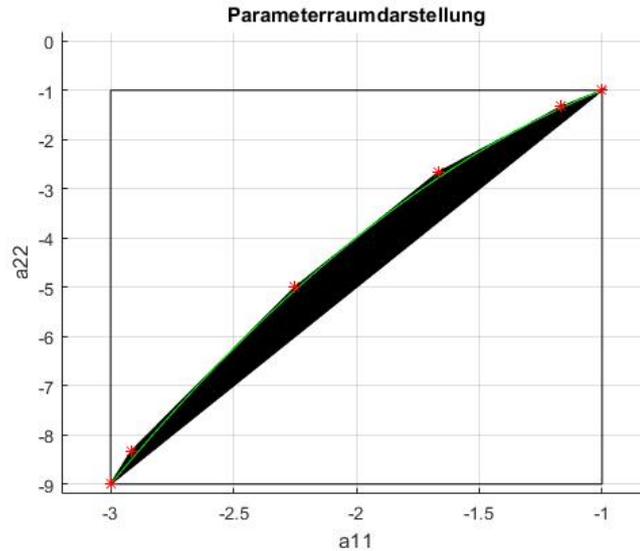


Bild 3.6: Polytope Einschließung von ungenau bekannten Parametern mit sechs Eckpunkten

dieser polytope Charakter nur bei Diskretisierung mit einem linearen Verfahren erhalten. Dagegen ist die exakte Diskretisierung (z. B. [Unb00]) durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}^{A_c T_s}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{e}^{A_c T_s} - \mathbf{I})\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c \quad (3.44)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_c, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_c \quad (3.45)$$

mit der Abtastzeit T_s gegeben. Damit werden die Matrizen des kontinuierlichen Modells (3.1) durch nichtlineare Zusammenhänge nach (3.44) in die diskrete Beschreibung überführt. Im Allgemeinen hängen alle Elemente der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} von allen Elementen des Parametervektors ab. Damit muss nach der Diskretisierung eine neue polytope Einschließung der ungenau bekannten Parameter gefunden werden.

Euler-Diskretisierung. Für technische Anwendungen genügt oft die Approximation des kontinuierlichen Systems durch (explizite) Euler-Diskretisierung. Dabei wird die zeitliche Ableitung durch die Differenzgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)}{T_s} \quad (3.46)$$

ersetzt, womit man das zeitdiskretet System (2.2) mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_c T_s, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_c T_s \quad (3.47)$$

erhält. Die weiteren Matrizen bleiben unverändert.

Liegt für ein kontinuierliches System die Parameterunsicherheit in den Matrizen $\mathbf{A}_c(\mathbf{p})$ und $\mathbf{B}_c(\mathbf{p})$ in *Strukturierter Beschreibung* nach (2.36) vor, so erhält man mittels Euler-Diskretisierung nach Gl. (3.47)

$$\mathbf{A}_S(\mathbf{p}) = \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_c(\mathbf{p})T_s \quad (3.48)$$

$$= \underbrace{(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_0 T_s)}_{\hat{\mathbf{A}}_0} + \sum_{j=1}^{N_p} p_j \underbrace{\mathbf{A}_j T_s}_{\hat{\mathbf{A}}_j}, \quad p_j \in [-1, 1] \quad (3.49)$$

und

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \mathbf{B}_c(\mathbf{p})T_s \quad (3.50)$$

$$= \mathbf{B}_0T_s + \sum_{j=1}^{N_p} p_j \mathbf{B}_j T_s, \quad p_j \in [-1, 1] \quad (3.51)$$

eine *Strukturierte Beschreibung* für das zeitdiskrete System.

Liegt für ein kontinuierliches System die Parameterunsicherheit in den Matrizen $\mathbf{A}_c(\mathbf{p})$ und $\mathbf{B}_c(\mathbf{p})$ in *Polytope Beschreibung* nach (2.45) vor, so erhält man mittels Euler-Diskretisierung (3.47) wegen

$$\mathbf{I}_n = \sum_{j=1}^{N_p} p_j \mathbf{I}_n \quad \text{für} \quad \sum_{j=1}^{N_p} p_j = 1 \quad (3.52)$$

für das zeitdiskrete System mit

$$\mathbf{A}_P(\mathbf{p}) = \mathbf{I}_n + \mathbf{A}_c(\mathbf{p})T_s \quad (3.53)$$

$$= \sum_{j=1}^{N_p} p_j \underbrace{(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_j T_s)}_{\tilde{\mathbf{A}}_j} \quad (3.54)$$

und

$$\mathbf{B}_P(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N_p} p_j \mathbf{B}_j T_s, \quad (3.55)$$

wieder eine *Polytope Beschreibung* mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{N_p} p_j = 1, \quad p_j \geq 0 \quad \forall j. \quad (3.56)$$

Hierbei wurden unabhängige Beschreibungen für $\mathbf{A}_c(\mathbf{p})$ und $\mathbf{B}_c(\mathbf{p})$ vorausgesetzt.

3.4. Hauptkomponentenanalyse für unsichere Parameter

Die Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis, PCA) ist ein Verfahren der statistischen Datenanalyse [Jol04]. Dabei werden Korrelationen mehrdimensionaler Merkmale von Datensätzen ermittelt. Durch eine Hauptachsentransformation werden die Daten in einem Vektorraum mit neuer Basis dargestellt. Die Merkmale werden so gewählt, dass eine möglichst geringe Korrelation auftritt. Übertragen auf die Analyse von Parameterunsicherheiten bedeutet dies, dass Richtungen im Parameterraum ermittelt werden können, in denen die Variation der Parameter im quadratischen Mittel die größte Ausprägung besitzt. Damit werden nur geometrische Aspekte behandelt. In welchem Parameterbereich möglicherweise eine ungünstige Dynamik vorliegt, die zu Überabschätzungen bei der Zustandsmengenbeobachtung mit $\mathbf{A}(\mathbf{p}) \supseteq \mathbf{A}(\mathbf{s})$ führen kann, wird nicht berücksichtigt.

Zur Berechnung einer Einschließung ist es erforderlich zu analysieren, in welchen Richtungen im Parameterraum die Variation mit den zulässigen Werten der \mathbf{s} besonders

ausgeprägt ist. Dann können dazu orthogonale Richtungen \mathbf{n}_i^T gewählt werden, in denen durch

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i^T \mathbf{a}(\mathbf{p}) &< q_i \quad \text{und} \\ \mathbf{n}_i^T \mathbf{a}(\mathbf{p}) &> -r_i \quad \text{mit } q_i < -r_i \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \end{aligned} \quad (3.57)$$

definierte, parallele Halbräume eine günstige Einschließung gelingt, wenn mit $\mathbf{a}(\mathbf{p})$ der Vektor aller Parameter von $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ bezeichnet wird (vgl. Gl. (3.39)).

Als Daten werden die Parameter der Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{s})$ nach Gl. (3.3),

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \left(f_{1,1}(\mathbf{s}) \dots f_{n,1}(\mathbf{s}), f_{1,2}(\mathbf{s}) \dots f_{n,2}(\mathbf{s}), \dots, f_{1,m}(\mathbf{s}) \dots f_{n,m}(\mathbf{s}) \right)^T \quad (3.58)$$

bei Diskretisierung des unsicheren Intervallvektors $\mathbf{s} \in [\mathbf{s}]$ aufgefasst. Wählt man für $[\mathbf{s}]$ ein Gitter mit z Punkten \mathbf{s}_k mit $k \in \{1 \dots z\}$, so ist der Parametervektor an den Gitterpunkten durch

$$\mathbf{f}_d(k) = \mathbf{f}(\mathbf{s}_k) \quad (3.59)$$

gegeben. Die Datenmatrix \mathbf{F}_d ist die Aneinanderreihung der Vektoren

$$\mathbf{F}_d = (\mathbf{f}_d(1) \dots \mathbf{f}_d(z)). \quad (3.60)$$

Bei der Analyse stochastischer Signale, für die die hier verwendete Methode entwickelt wurde, wird von erwartungswertfreien Zufallsvariablen ausgegangen. Dementsprechend sind zunächst die Mittelwerte der betrachteten Parameter zu subtrahieren:

$$\tilde{\mathbf{f}}_d(k) = \mathbf{f}_d(k) - \frac{1}{z} \sum_{k=1}^z \mathbf{f}_d(k). \quad (3.61)$$

Die neue Datenmatrix der Dimension $[nm \times z]$ soll mit $\tilde{\mathbf{F}}_d$ bezeichnet werden:

$$\tilde{\mathbf{F}}_d = (\tilde{\mathbf{f}}_d(1), \dots, \tilde{\mathbf{f}}_d(z)). \quad (3.62)$$

Die Korrelationsanalyse erfolgt durch Bildung der Kovarianzmatrix, die man mit

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{F}}_d) = \frac{1}{z} \tilde{\mathbf{F}}_d \tilde{\mathbf{F}}_d^T \quad (3.63)$$

berechnet. Die Kovarianzmatrix hat die Eigenschaft, orthogonale Eigenvektoren zu besitzen. Der Eigenvektor zum größten Eigenwert definiert die Hauptkomponente. In dieser Richtung ist die Varianz der Daten im quadratischen Mittel am größten. Durch Hauptachsentransformation können die Daten in ein Basissystem transformiert werden, indem keine Vorzugsrichtung der Varianz vorliegt. Bezeichnet

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda_{N_p} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

die Diagonalmatrix der Eigenwerte und

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{N_p}) \quad (3.65)$$

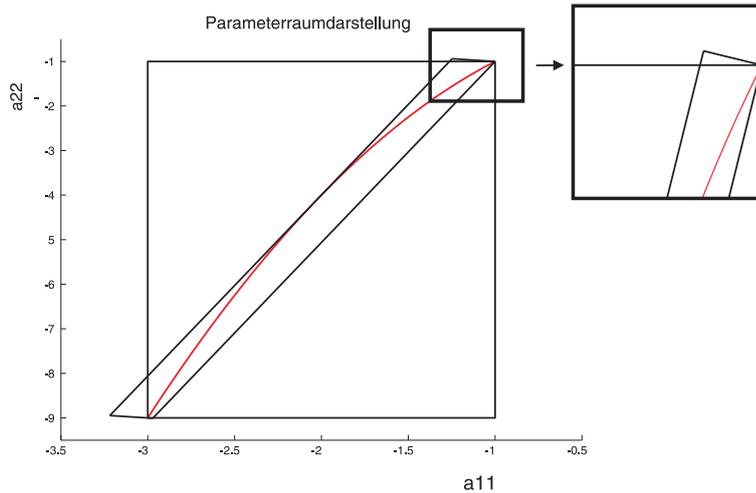


Bild 3.7: Vergleich der Beschreibungen des Originalsystems, durch Intervallmatrix und durch Hauptkomponentenanalyse ermittelte strukturierte Unbestimmtheit

die Matrix der zugehörigen Eigenvektoren, so ist diese Transformation durch

$$\hat{\mathbf{F}}_d = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{F}}_d \quad (3.66)$$

gegeben.

Das hier verfolgte Ziel der Ermittlung von Richtungen im Parameterraum ist bereits mit der Ermittlung der Eigenvektoren der Kovarianzmatrix erreicht. Erfolgt die Betrachtung im N_p -dimensionalen Parameterraum, so erhält man genau N_p orthogonale Eigenvektoren. Ordnet man die Eigenwerte, so dass

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{N_p} , \quad (3.67)$$

so stellt \mathbf{v}_1 zum Eigenwert λ_1 den Vektor in Richtung der größten Varianz der Daten dar. Eigenvektor \mathbf{v}_2 zum Eigenwert λ_2 stellt den Vektor in Richtung der größten Varianz orthogonal zum ersten Eigenvektor da usw. Verwendet man diese Vektoren als Richtungen für die Einschließung der Parameterwerte, so erhält man aufgrund der Orthogonalität der Vektoren einen Quader, der die möglichen Parameter einschließt und dabei ein geringes Volumen im Vergleich zu beliebigen anderen Lagen des Quaders im Parameterraum aufweist. Dazu sind natürlich die Maxima und Minima der auf die Vektoren \mathbf{v}_i projizierten Funktionen $\mathbf{f}(s_i)$ zu bestimmen. Mit

$$q_i = \max_{s \in \mathcal{S}} \mathbf{v}_i^T \mathbf{f}(s) \quad (3.68)$$

$$-r_i = \min_{s \in \mathcal{S}} \mathbf{v}_i^T \mathbf{f}(s) \quad (3.69)$$

erhält man die gesuchten Einschließungen nach Gleichung (3.57).

Beispiel 3.3: Fortsetzung von Beispiel 3.1/3.2.

In Beispiel 3.1 wurde von nur einem unsicheren Parameter $s \in [1, 3]$ ausgegangen, welcher Einfluss auf die Parameter $a_{1,1}$ und $a_{2,2}$ der Systemmatrix (3.26) hat. Hier wird der Parameter mit einer Auflösung von $\Delta s = 0.002$ diskretisiert, so dass man die $[2 \times 1001]$ -Datenmatrix $\tilde{\mathbf{F}}_d$ erhält. Die Kova-

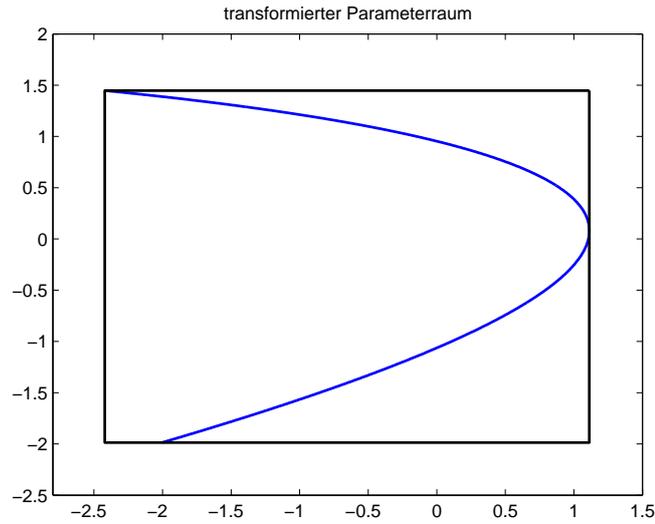


Bild 3.8: Darstellung der Parameter nach Hauptachsentransformation

rianzmatrix ergibt sich zu

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{F}}_d) = \begin{pmatrix} 0.3343 & 1.3373 \\ 1.3373 & 5.4387 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Der Eigenvektor zum größte Eigenwert $\lambda_1 = 5.77$ ist mit

$$\mathbf{v}_1^T = (0.24; 0.97)\lambda_1 = 5.77 \quad (3.71)$$

gegeben und definiert die Ausrichtung der langen Kanten des in Abb. 3.7 gezeigten Polytops. In der separaten Darstellung (rechts oben) mit identisch skalierten Achsen wird deutlich, dass es sich um orthogonale Eigenvektoren handelt, die mit dem hier beschriebenen Verfahren auf einen Quader im Parameterraum führen. Abb. 3.8 verdeutlicht die Wirkung der Hauptkomponentenanalyse. Durch Transformation der Daten nach Gleichung (3.66) liegen alle Werte in einem Quadrat, welches der Transformation des einschließenden Quaders, ebenfalls mit Gleichung (3.66), entspricht. \square

4. Prädiktion

Die Aufgabe der Prädiktion für ein dynamisches System ist die Vorhersage des Verhaltens bei bekanntem Eingangssignal. Für ein Modell ohne Unsicherheiten würde man von Simulation sprechen. Als Teilschritt des Prädiktor-Korrektor-Schemas zur Zustandsmengenbeobachtung werden die Methoden hier vorgestellt.

4.1. Ziel der Zustandsprädiktion

Sind entweder der Anfangszustand oder die Parameter des Systems nur ungenau bekannt, so führt die Zustandsprädiktion bereits auf Mengen möglicher Zustände und Ausgangssignale. In diesem Zusammenhang können auch Eingangssignale als ungenau bekannt betrachtet werden. Als ungenau bekanntes Eingangssignal kann sowohl ein unbekanntes Störsignal als auch ein gemessenes Signal verstanden werden. Beide Fälle sollen hier, wie in Kapitel 2 beschrieben, durch den Eingangsvektor $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}(k)$ erfasst werden. Parameterunsicherheiten liegen in der Systemmatrix $\mathbf{A}(\mathbf{s})$ und der Eingangsmatrix $\mathbf{B}(\mathbf{s})$ vor. Das Ziel der Prädiktion kann für die allgemeine Form der Parameterunsicherheit

$$\mathbf{s}(k) \in \mathcal{S}(k) \quad \forall k \quad (4.1)$$

formuliert werden. Die Unsicherheit \mathcal{S} kann für die Prädiktion ganz allgemein zeitvariabel angenommen werden sowie auch andere Modelleigenschaften. Allerdings soll in der Darstellung im Folgenden darauf verzichtet werden, auch weil ein festes Modell $\mathcal{M}(\mathbf{p}) \supseteq \mathcal{M}(\mathbf{s}(k))$ für die Beschreibung oft ausreichend ist. Für das Modell $\mathcal{M}(\mathbf{p})$ werden Beobachtungs- und Prädiktionsmethoden zur Verfügung gestellt, welche auf das feste Modell zugeschnitten werden können.

Exakte Prädiktion. Ziel der Prädiktion ist die Berechnung der Menge

$$\mathcal{X}_p^*(k_p) = \mathcal{X}_p^*(k_p \mid 0) \quad (4.2)$$

der um k_p Schritte in die Zukunft prädizierten Zustandsmenge für das dynamische System (2.4). Dabei soll die Schreibweise in (4.2) zum Ausdruck bringen, dass die Prädiktion bei Kenntnis der Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0 erfolgt:

Definition 5 (Exakte Prädiktion)

$$\mathcal{X}_p^*(0) := \mathcal{X}_0 \text{ sei die Anfangszustandsmenge.} \quad (4.3)$$

Die exakte um $k_p > 0$ Zeitschritte prädizierte Zustandsmenge für das Modell $\mathcal{M} = \{\{\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{B}(\mathbf{p}), *\}, \mathcal{S}, \mathcal{X}_0, \mathcal{U}(k), \mathcal{Y}(k)\}$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_p^*(k_p) := \left\{ \mathbf{x} = \prod_{j=1}^{k_p} \mathbf{A}(\mathbf{s}(j-1)) \mathbf{x}' + \sum_{i=1}^{k_p-1} \prod_{j=i}^{k_p-1} \mathbf{A}(\mathbf{s}(j)) \mathbf{B}(\mathbf{s}(i-1)) \mathbf{u}(i-1) \right. \\ \left. + \mathbf{B}(\mathbf{s}(k_p-1)) \mathbf{u}(k_p-1) \right. \\ \left. \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}_0, \mathbf{u}(k) \in \mathcal{U}(k) \text{ und } \mathbf{s}(k) \in \mathcal{S}, \quad \forall k \in \{0, \dots, k_p-1\} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit

$$\prod_{j=1}^i \mathbf{A}(\mathbf{s}(j)) = \mathbf{A}(\mathbf{s}(i))\mathbf{A}(\mathbf{s}(i-1)) \dots \mathbf{A}(\mathbf{s}(1)). \quad (4.5)$$

Die Berechnung von $\mathcal{X}_p^*(k_p)$ wird als exakte k_p -Schritt-Prädiktion bezeichnet.

Die prädizierte Menge umfasst für jedes k_p alle Werte, die der Systemzustand unter Berücksichtigung der Menge der Anfangszustände \mathcal{X}_0 und mit der gegebenen Menge möglicher Eingangsfolgen $\mathcal{U}(0 \dots k_p - 1)$ annehmen kann.

Die Annahme des zeitinvarianten Systemparameters $\mathbf{s}(k) \in \mathcal{S}$ sowie der zeitvariablen Messfehler $\mathbf{e}_u(k)$ ist Voraussetzung dafür, dass eine rekursive Darstellung prädizierter Zustandsmengen, die wie folgt gegeben ist, möglich ist:

Rekursive Zustandsmengenprädiktion

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_p^*(0) &:= \mathcal{X}_0 & (4.6) \\ \mathcal{X}_p^*(k_p) &:= \{\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{s}(k_p - 1))\mathbf{x}' + \mathbf{B}(\mathbf{s}(k_p - 1))\mathbf{u} \\ &\quad | \mathbf{x}' \in \mathcal{X}_p^*(k_p - 1), \mathbf{u} \in \mathcal{U}(k_p - 1), \mathbf{s} \in \mathcal{S}\} \quad \text{für } k_p > 0. \end{aligned}$$

Die Annahme eines systematischen Messfehlers (z. B. Bias) sowie das Modell des ungenau bekannten, aber konstanten Parameters $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ wird hier nicht getroffen. In [PSQ03] wird gezeigt, dass die exakt prädizierten Mengen \mathcal{X}_p^* dann von allen vergangenen Eingangsintervallen $\mathcal{U}(k)$ abhängen und keine rekursive Darstellung gefunden werden kann. In [Rau08] werden Methoden vorgestellt, mit denen verifizierte Einschließungen ungenau bekannter dynamischer Systeme berechnet werden können. Zeitvariable Parameter werden dabei als Zustandsgrößen aufgefasst, deren Dynamik in Form von Differenzial- oder Differenzengleichungen beschrieben wird.

Überapproximation. Bei der Zustandsmengenbeobachtung in Kapitel 5 wird die Prädiktion eingesetzt, um die Menge aller Zustände zu ermitteln, für die das Systemmodell mit den aktuellen Messungen von Eingangs- und Ausgangssignalen konsistent ist. Liegen in jedem Zeitschritt Messinformationen vor, so beschränkt sich die Prädiktion auf einen Zeithorizont von $k_p = 1$, bevor eine Korrektur durch die Messung erfolgt. Das Verfahren der Zustandsmengenbeobachtung soll online eingesetzt werden. Allerdings ist im Allgemeinen die exakte Berechnung der Menge $\mathcal{X}_p^*(k)$ schon mit einem sehr hohen Rechenaufwand verbunden, da die Beschreibung der resultierenden Zustandsmengen komplex ist. Die Komplexität nimmt in der Regel mit der Zeit zu. Deshalb wird das Ziel formuliert, Mengen \mathcal{X}_p zum Zeitpunkt k zu berechnen, die eine äußere Approximation

$$\mathcal{X}_p \supseteq \mathcal{X}_p^* \quad (4.7)$$

der Menge aller prädizierten Zustände darstellen. Entsprechend der Darstellung (4.6) werden im Folgenden nur Verfahren zur Prädiktion für einen Zeitschritt angegeben, wobei die folgenden Bezeichnungen verwendet werden:

$$\mathcal{X}_p := \mathcal{X}(k | k - 1) \quad (4.8)$$

$$\mathcal{X}' := \mathcal{X}(k - 1) := \mathcal{X}(k - 1 | k - 1) \quad (4.9)$$

Damit bezeichnet \mathcal{X}_p die mit der Kenntnis aller Messinformationen bis zum Zeitpunkt $k - 1$ bekannte, aktuelle Einschließung des Zustands (zum Zeitpunkt k).

Sind bei der Prädiktion Unbestimmtheiten in der Systemmatrix zu berücksichtigen, erhält man im Allgemeinen nichtkonvexe prädizierte Bildmengen (siehe Abschn. 4.3). Dann ist es erforderlich, in jedem Zeitschritt konvexe Überapproximationen der prädizierten Menge zu berechnen.

Minimale konvexe Prädiktion (MkP). In [BM08](S.239), [BS79] wird beschrieben, dass es durch Abbildung eines Vorgängerpolytops \mathcal{X}' in \mathcal{V} -Darstellung prinzipiell möglich ist, eine minimale konvexe Überapproximation $\mathcal{X}_{p,min}$ der Zustandsmenge \mathcal{X}^* zu berechnen. Dazu ist die punktweise Abbildung mit allen Eckpunkten \mathbf{A}_i der *Polytopen Beschreibung* (2.45) notwendig:

$$MkP : \mathcal{X}' = Conv\{\mathcal{V}_j\} \longrightarrow \mathcal{X}_{p,min} : \quad (4.10)$$

$$\mathcal{X}_{p,min} := Conv\{\mathbf{A}_i \mathcal{V}_j + \mathbf{B} \mathcal{U}_h, i \in \{1, \dots, N_{PB}\}, j, h\} \quad (4.11)$$

Darin bezeichnet \mathcal{U}_h die Eckpunkte des Eingangspolytops. Laut [BS79] erfüllt diese Abbildung die schöne Eigenschaft, dass

$$\mathcal{X}'^* \longrightarrow \mathcal{X}_p^* \longrightarrow Conv\{\mathcal{X}_p^*\} \quad (4.12)$$

$$Conv\{\mathcal{X}'^*\} \xrightarrow{MkP} Conv\{\mathcal{X}_p^*\} \quad (4.13)$$

obwohl die Menge \mathcal{X}'^* nicht konvex ist. Dies bedeutet, dass die konvexe Überapproximation nicht durch fortgesetzte Prädiktion kumuliert.

Es entstehen jedoch in jedem Prädiktionsschritt eine Vielzahl von Punkten, die im Inneren des Bildpolytops liegen. Sie aus der Menge \mathcal{V} zu entfernen, ist numerisch aufwendig. Außerdem ist die Umwandlung in \mathcal{V} -Darstellung aufwendig und eine minimale konvexe Approximation für Polytope in \mathcal{H} -Darstellung nicht bekannt.

Deshalb beschreiben die folgenden Abschnitte Verfahren zur Berechnung von Überapproximation

$$\mathcal{X}_p \supseteq \mathcal{X}_{p,min} \supseteq \mathcal{X}_p^*, \quad (4.14)$$

wobei die \mathcal{H} -Darstellung konvexer Polytope verwendet wird.

In Abschn. 4.3.1 und 4.3.2 werden Verfahren zur Berechnung dieser Mengen angegeben. Dabei kann die Orientierung der einschließenden Richtungen im Zustandsraum beliebig sein. Die Wahl dieser einschließenden Richtungen und der Einsatz der Überapproximation zur Reduktion der Dimension des Polytops verbleiben als Freiheitsgrade des Entwurfs einer Prädiktion oder eines Zustandsmengenbeobachters.

Überblick zur Approximationsqualität:

- Die *exakte Prädiktion* nach Definition 5 stellt keine Überapproximation dar und lässt sich für LDTI-Systeme prinzipiell ermitteln, da diese Mengen konvex sind. Problematisch bei der Prädiktion ist nur die wachsende Komplexität (Zahl der Ungleichungen) des Polytops, die eine Überapproximation erforderlich machen kann.

- Die *Minimale konvexe Prädiktion (MkP)* für LDTI Systeme prinzipiell durch Abbildung der Eckpunkte von Polytopen berechnet werden. Numerisch aufwendig ist die Entfernung innerer Punkte bzw. die wechselseitige Transformation von \mathcal{V} -Darstellung und \mathcal{H} -Darstellung eines Polytops. Deshalb wird diese Abbildung nicht weiter betrachtet.
- Zur Überapproximation bei LDTI-Systemen sowie LDPV-Systemen werden Einschließungen in Richtungen \mathbf{n} (zusammengefasst zur Matrix \mathbf{N}) berechnet, welche minimal bezüglich dieser Richtungen sind. Deshalb wird die Approximation auch als *\mathbf{N} -minimal* bezeichnet.
- Damit grenzt sich die Methode von einer Approximation in den Richtungen \mathbf{N} ab, bei welcher zur Reduktion des numerischen Aufwands auf diese Minimalität verzichtet wird. Diese *nicht-minimale Approximation* wird hier der Vollständigkeit halber ebenfalls betrachtet.

Die genannten Eigenschaften der Prädiktion gelten ebenso für die Beobachtungsmethoden in Abhängigkeit von der jeweils eingesetzten Prädiktionsmethode.

4.2. Prädiktion für LDTI-Systeme

4.2.1. Exakte Prädiktion

Die exakte Prädiktion für LDTI-Systeme basiert im Wesentlichen auf Standardtransformationen von Polytopen, wie sie in Anhang A nochmals dargestellt sind. Insbesondere zur Projektion und zur Darstellung für nichtinvertierbare Matrizen finden sich dort Ergänzungen. Die Systemmatrix von LDTI-Systemen ist zwar oft regulär, allerdings ist die Betrachtung im Hinblick auf Matrizen mit unsicheren Parametern sinnvoll.

Autonomes System (ohne Eingang). Die Transformation eines Polytops \mathcal{X}' durch die quadratische Systemmatrix ist gegeben durch

$$\mathcal{X}_p^* = \mathbf{A}\mathcal{X}' = \{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'\}. \quad (4.15)$$

Ist die Darstellung von \mathcal{X}' als \mathcal{V} -Polytop (A.2) gegeben, so genügt die Abbildung aller Punkte $\mathbf{x}' \in \mathcal{V}$, also aller Eckpunkte des Polytops, zur Beschreibung des Bildpolytops. Bei der hier verwendeten Darstellung des Vorgängerpolytops \mathcal{X}' als \mathcal{H} -Polytop (A.5)

$$\mathcal{X}' = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}\} \quad (4.16)$$

erhält man das Bildpolytop nach der Vorschrift (vgl. (A.43),(A.44)).

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_p^* &= \{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}', \mathbf{M}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Prädiktion mit exaktem Eingang. Bei Berücksichtigung eines exakt bekannten oder exakt messbaren Eingangssignals $\mathbf{u}_m = \mathbf{u}^*$ erhält man die affine Transformation

$$\mathcal{X}_p^* = \{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'\} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}' = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{u}_m), \mathbf{M}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_m\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hier wird (4.17) lediglich um eine Translation (vgl. (A.40)) ergänzt.

Prädiktion mit Eingangspolytop. Ist das exakt bekannte System durch die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} gegeben mit dem ungenau bekannten Stör- oder Steuereingang $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, dann ermittelt die Prädiktion die Menge

$$\mathcal{X}_p^* = \mathbf{M}\mathcal{X}' \oplus \mathbf{B}\mathcal{U}. \quad (4.20)$$

Für ein \mathcal{V} -Polytop wäre die Zustandsübergangsgleichung für alle Kombinationen von Eckpunkten von \mathcal{X}' und \mathcal{U} auszuwerten (vgl. minimale konvexe Prädiktion (MkP) aus Abschn. 4.1). Anschließend müssten im Inneren von \mathcal{X}_p^* liegende Punkte entfernt werden.

$$\mathcal{X}_p^* = \{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \quad (4.21)$$

$$= \{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'\} \oplus \{\mathbf{x}_u = \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}. \quad (4.22)$$

Darin bezeichnet der Mengenoperator \oplus die Minkowski-Summe. Algorithmen zur Auswertung der Minkowski-Summe für \mathcal{H} -Polytope stehen zur Verfügung und werden im Anhang A angesprochen. Sie sind mit den im Folgenden verwendeten Projektionsalgorithmen verwandt. Zuvor muss noch das Polytop $\mathbf{B}\mathcal{U}$ durch Abbildung mit in der Regel nicht regulärer (und auch nicht quadratischer) Matrix \mathbf{B} ermittelt werden. Anhang A kann außerdem entnommen werden, wie bei nicht regulären Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} die Polytope in Gl. (4.22) ermittelt werden.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, ein Projektionsproblem zu formulieren. Die Menge \mathcal{X}_p^* lässt sich auch analog zu (4.19) mit

$$\mathcal{X}_p^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{u}) \leq \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \quad (4.23)$$

darstellen, was auf die folgende Beschreibung im Zustands-/Eingangsraum führt [Pla06]. Die Prädiktion kann dann durch Projektion des Polytops

$$\mathcal{P} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_u \end{pmatrix} \right\} \quad (4.24)$$

auf den Zustandsraum \mathbb{R}^n berechnet werden, wobei die Darstellung des Eingangspolytops (2.20)

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{M}_u\mathbf{u} \leq \mathbf{b}_u\} \quad (4.25)$$

aus Kapitel 2 nach Gleichung (2.21) entstanden sein kann. Man erhält also

$$\mathcal{X}_p^* = \text{Proj}_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}. \quad (4.26)$$

Wichtig dabei ist, dass der gewählte Projektionsalgorithmus (siehe Anhang A) nicht nur effizient eine Darstellung der Bildmenge berechnet, sondern auch eine minimale Darstellung ohne redundante Ungleichungen. Bei wiederholter Prädiktion über viele Zeitschritte steigt die Komplexität der Polytope (Anzahl der Ungleichungen) in der Regel trotzdem stark an.

Beispiel 4.1: Prädiktion für ein exakt bekanntes System mit ungenau bekanntem Eingang.

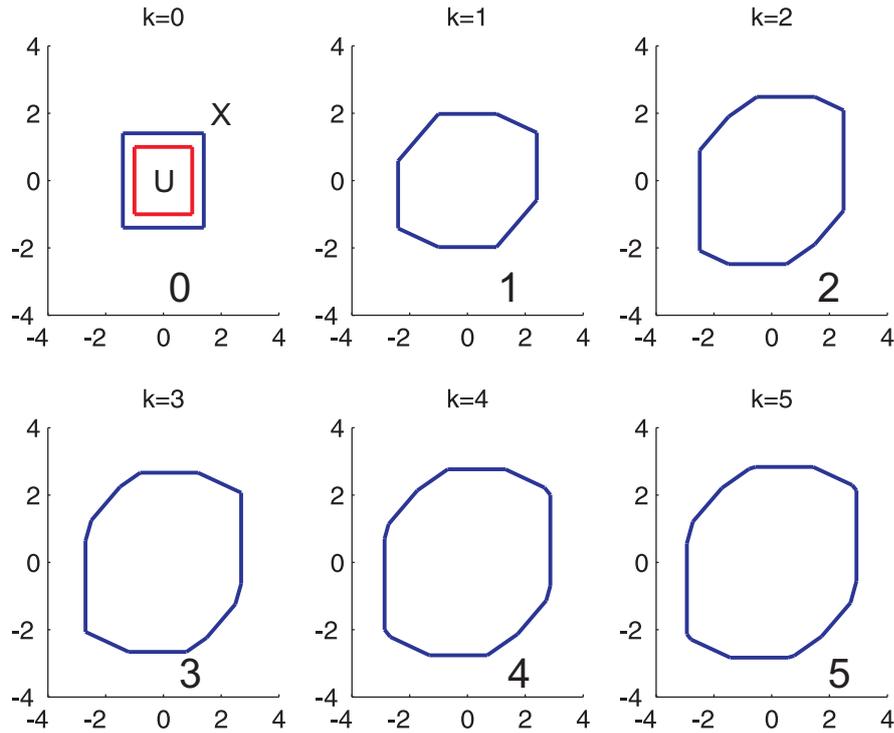


Bild 4.1: Prädiktion mit ungenau bekanntem Eingang

In diesem Beispiel erfolgt die mehrfache Abbildung des Vorgängerpolytops aus Abb. 4.1 (oben, links) mit dem der Einfachheit halber ebenfalls dort dargestellten Eingangspolytop \mathcal{U} . Die Systemmatrix ist mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

gegeben und die Einheitsmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{I}_2$ wird als Eingangsmatrix verwendet. Die durch das Eingangspolytop definierten Kanten treten in jedem Bildpolytop als Kanten auf. Die Anzahl der Kanten des Bildpolytops M_p nimmt mit jedem Prädiktionsschritt um vier zu. Allerdings gilt nur im \mathbb{R}^2 , dass $M_p(k+1) = M_p(k) + M_m$, wenn M_m die Dimension des Eingangspolytops ist.

Dieses Beispiel wurde mit zwei verschiedenen Implementierungen gerechnet, zum einen nach Gl. (4.24) unter Verwendung eines Projektionsalgorithmus und zum Anderen durch Auswertung der Minkowski-Summe, wobei hier

$$\mathcal{X}_u = \{\mathbf{x}_u = \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U} \quad \forall k \quad (4.28)$$

besonders einfach darzustellen ist. \square

Nicht-reguläre Systemmatrix. In Anhang A, Gl. (A.47) ist zunächst dargestellt, wie die Transformation eines Polytops mit nicht-regulärer Systemmatrix durchgeführt werden kann. In Erweiterung auf nichtautonome Systeme mit singulärer Systemmatrix kann wegen

$$\mathcal{X}_p^* = \{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u} \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \quad (4.29)$$

$$= \{\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}' - \mathbf{B}\mathbf{u} = 0 \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \quad (4.30)$$

die folgende Darstellung gefunden werden (vgl. [ST99]):

$$\mathcal{P} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u})^T \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \mid \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_u \end{pmatrix} \right\} \quad (4.31)$$

$$\mathcal{X}_p^* = \text{Proj}_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}. \quad (4.32)$$

Nachteilig ist die Notwendigkeit, eine Projektion aus dem $2n + m$ -dimensionalen erweiterten Zustands-/Eingangsraum durchführen zu müssen.

4.2.2. N-minimale Prädiktion, Überapproximation

Da die Anzahl der Ungleichungen, welche ein Polytop beschreiben, bei wiederholter Ausführung der Prädiktion in der Regel stark steigt, wird in diesem Abschnitt die Berechnung konvexer Überapproximationen der Menge $\mathcal{X}_p \supseteq \mathcal{X}_p^*$ vorgestellt. Die Qualität der Überapproximation hängt dabei von der Wahl der mit \mathbf{n}_i^T bezeichneten und in der Matrix \mathbf{N} zusammengefassten Richtungen ab, die das prädiizierte Polytop \mathcal{X}_p beschreiben.

In diesem Bericht wird vorgeschlagen, für online-Anwendungen feste Richtungen zu wählen, da so sichergestellt werden kann, dass der Rechenaufwand konstant bleibt. Die Approximationsrichtungen können anhand der Eigenschaften der Eingangssignale und der Abbildungsmatrizen festgelegt werden, was später noch gezeigt wird. Unabhängig von der Art der Anfangszustandsmenge treten beispielsweise im prädiizierten Polytop in jedem Fall in jedem Zeitschritt k die Hyperebenen $\mathbf{B}\mathbf{U}$ (in der Form $\mathbf{M}_b \mathbf{x} \leq q_b$) auf.

Ein anderer Ansatz besteht darin, zunächst die exakten Einschließungsrichtungen zu wählen. Für die exakte Prädiktion ergeben sich aus den Richtungen \mathbf{M}_0 der Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0 durch Abbildung die Hyperebenen $\mathbf{M}_0 \mathbf{A}^{-1}$ bzw. man erhält rekursiv

$$\mathbf{M}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_k \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{M}_b \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Die Zahl der Hyperebenen wächst damit über der Zeit, so dass trotzdem eine Überapproximation erfolgen muss.

Überapproximation eines Polytops. Zur Überapproximation eines durch

$$\mathcal{X} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M} \mathbf{x} \leq \mathbf{q} \} \quad (4.34)$$

gegebenen Polytops in den gewünschten Richtungen \mathbf{n}_i^T mit $i \in \{1 \dots M_p\}$ sind die M_p linearen Optimierungsprobleme

$$b_i = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} (\mathbf{n}_i^T \cdot \mathbf{x}), \quad i \in \{1, \dots, M_p\} \quad (4.35)$$

zu lösen. Das neue Polytop ist dann durch

$$\mathcal{X}_{\text{oa}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{N} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \} \quad (4.36)$$

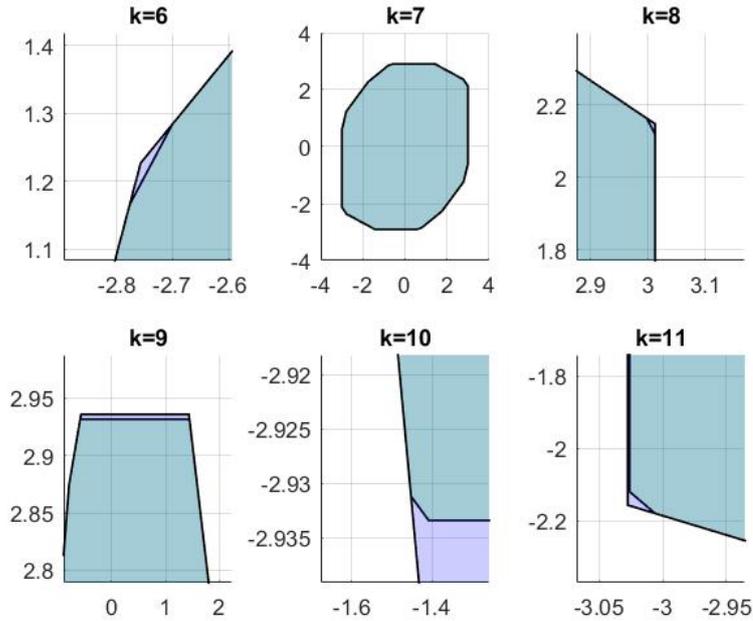


Bild 4.2: Prädiktion mit ungenau bekanntem Eingang, Überapproximation

gegeben mit

$$\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{M_p})^T, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{M_p})^T. \quad (4.37)$$

Für die Polytope gilt

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_{\text{oa}}, \quad (4.38)$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für die Wahl $\mathbf{N} = \mathbf{M}$ gilt.

Die Approximation kann nun auf die in Abschnitt 4.2.1 ermittelten Polytope angewendet werden. Dies kann in jedem Zeitschritt oder in regelmäßigen Abständen erfolgen. Effizient ist es, anstelle der Projektion direkt die Approximation auf die Polytope \mathcal{P} , (4.24), anzuwenden. Da dieses Polytop sich im erweiterten Zustands-/Eingangsraum befindet, ist eine Erweiterung der Richtungsvektoren $\tilde{\mathbf{n}}^T = (\mathbf{n}, \mathbf{0}_{[1 \times m]})^T$ erforderlich. Die Werte b_i erhält man mit

$$b_i = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} (\tilde{\mathbf{n}}_i^T \cdot \mathbf{p}), \quad i \in \{1, \dots, M_p\} \quad (4.39)$$

Unverändert gilt (4.39) für Polytope (4.31), nur mit veränderten Approximationsvektoren $\tilde{\mathbf{n}}^T = (\mathbf{n}, \mathbf{0}_{[1 \times (n+m)]})^T$. Diese Vorgehensweise bietet sich bei Überapproximation in jedem Zeitschritt an, weil dann insgesamt nur die linearen Programme (4.39) zur Prädiktion zu lösen sind.

Beispiel 4.2: Fortsetzung von Beispiel 4.2.1

Die in Abb. 4.1 dargestellten exakten Polytope kann man auch durch die Lösung linearer Programme (4.39) in den Richtungen (4.33) aus dem Polytop (4.24) ermitteln. Die Zahl der Kanten wächst im vorliegenden Beispiel pro Zeitschritt um vier an. Man erkennt aber, dass die neuen Kanten nicht dominant auftreten, weshalb es nahe liegt die rekursive Ermittlung neuer

Kanten zu beenden, was hier ab $k = 6$ erfolgt. Im weiteren Verlauf werden die bis dahin gewonnenen Richtungen als feste Richtungen verwendet. Abb. 4.2 zeigt, dass deshalb gegenüber der exakten Lösung Überapproximationen entstehen und weiter propagiert werden, allerdings sind diese so geringfügig, dass sie nur durch eine deutliche Vergrößerung der betroffenen Polytope sichtbar werden. \square

Eine andere Form zur direkten Ermittlung einer Überapproximation ergibt sich aus (4.29):

$$b_i = \max_{x' \in \mathcal{X}', u \in \mathcal{U}} \mathbf{n}_i^T (\mathbf{A}x' + \mathbf{B}u) \quad (4.40)$$

$$= \max_{x' \in \mathcal{X}'} \mathbf{n}_i^T \mathbf{A}x' + \max_{u \in \mathcal{U}} \mathbf{n}_i^T \mathbf{B}u \quad (4.41)$$

Hier werden praktisch die Richtungsvektoren der gesuchten Einschließung mit $\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}$ in den Urbildraum transformiert (analog für den Eingang). Man erhält lineare Programme in den Dimensionen n und m .

Die durchgeführte Überapproximation erfüllt die folgende Eigenschaft:

Definition 6 (*N-minimale Prädiktion*)

Das Polytop

$$\mathcal{X}_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{N}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \supseteq \mathcal{X}_p^* \quad (4.42)$$

heißt *N-minimale Prädiktion* des Polytops \mathcal{X}' für das gegebene Modell, wenn gilt:
 $\nexists \mathcal{X}_N \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{N}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ (mit der selben Matrix \mathbf{N} wie \mathcal{X}_p), so dass $\mathcal{X}_p^* \subseteq \mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}_p$.

Die Eigenschaft bedeutet lediglich, dass \mathcal{X}_p minimal bezüglich der gewählten Einschließungsrichtung ist. Sie gilt für alle hier ermittelten Überapproximationen. Dies erscheint trivial, da die Polytope in \mathcal{X}_{oa} durch Lösung linearer Programme, also Minimierung der Einschließung in den jeweiligen Richtungen \mathbf{n}_i^T ermittelt werden. Die Eigenschaft wird hier auch deshalb eingeführt, da bei Prädiktion mit *Strukturierter Beschreibung* auch ein anderer Weg beschritten werden kann, um den Rechenaufwand zu reduzieren (siehe den folgenden Abschnitt).

4.3. Prädiktion für LDPV-Systeme (mit unsicheren Parametern)

Hier soll zunächst die Prädiktion für die *Strukturierte Beschreibung* und die *Polytope Beschreibung* der Parameterunsicherheiten behandelt werden. Aufgrund der unsicheren Parameter ist die exakte prädizierte Menge \mathcal{X}_p^* im Allgemeinen nicht konvex. Deshalb stellt sich erneut die Frage nach geeigneten Einschließungsrichtungen, um entsprechend der Zielstellung aus Abschnitt 4.1 bei der Prädiktion möglichst geringe Überapproximationen $\mathcal{X}_p \supseteq \mathcal{X}_p^*$ zu erhalten.

Die Qualität der Überapproximation hängt dabei von der Wahl der mit \mathbf{n}_i^T bezeichneten und in der Matrix \mathbf{N} zusammengefassten Richtungen ab, die das prädizierte Polytop \mathcal{X}_p beschreiben. Die Richtungen können beispielsweise in jedem Zeitschritt in Abhängigkeit des Vorgängerpolytops \mathcal{X}' bestimmt werden. Alternativ können Richtungen anhand der

Eigenschaften der Eingangssignale und der Abbildungsmatrizen fest gewählt werden, wobei Anhaltspunkte dazu aus dem vorherigen Abschnitt 4.2.2 resultieren. Bei der Zustandsmengenbeobachtung können auch die Eigenschaften der Messsignale für eine günstige Wahl entscheidend sein.

Der Einfluss unsicherer Parameter auf die Prädiktion wird in Abschnitt 4.3.3 genauer untersucht. Aus den Betrachtungen lassen sich Hinweise ableiten, wie Einschließungsrichtungen günstig gewählt werden können, wenn unsichere Parameter die Prädiktion stark beeinflussen. Bei geringer Wirkung genügt möglicherweise die Analyse des nominalen Modells \mathcal{M}_0 .

4.3.1. Prädiktion mit *Strukturierter Beschreibung*

In diesem Abschnitt wird die Berechnung konvexer Überapproximationen der Menge \mathcal{X}_p^* für die in Abschn. 2.4.2 eingeführte Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten durch die *Strukturierte Beschreibung* dargestellt. Die Methoden der Überapproximation vervollständigen die Ansätze aus [Pla06].

***N*-minimale Prädiktion.** Für die *Strukturierte Beschreibung* kann eine *N*-minimale Prädiktion erfolgen. Sie liefert für die gegebenen Richtungen \mathbf{n}_i^T eine minimale Einschließung der Menge \mathcal{X}_p^* nach Definition 4.42. Dazu sind formal die M_p Optimierungsprobleme

$$b_i = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T (\mathbf{A}_S(\mathbf{p})\mathbf{x}' + \mathbf{B}_S(\mathbf{p})\mathbf{u})) \quad (4.43)$$

zu lösen. Allerdings ist es dafür von Vorteil, die Matrix $\mathbf{A}_P(\mathbf{p})$ in Form einer *Polytopen Beschreibung* einzusetzen, was im nächsten Abschn. 4.3.2 gezeigt wird. Das die *Strukturierte Beschreibung* einen Spezialfall darstellt und in die *Polytope Beschreibung* umgeformt werden kann, zeigt Abschn. 2.4.2. Als Ergebnis erhält man die Lösung durch Einsetzen aller Eckpunkte des Intervallvektors $[\mathbf{p}]$, also der Eckpunkte der Darstellung im Parameterraum

$$b_i = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{V}_{[\mathbf{p}]}} \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T (\mathbf{A}_P(\mathbf{p})\mathbf{x}' + \mathbf{B}_P(\mathbf{p})\mathbf{u})) \quad (4.44)$$

und Ermittlung des größten Wertes. Für jede Richtung sind damit N_p lineare Programme für N_p Eckpunkte zu lösen (siehe Abschn. 4.3.2).

Prädiktion mit Überapproximation. Die *Strukturierte Beschreibung* ermöglicht es, den Rechenaufwand zu verringern. Dazu kann eine Überapproximation der *N*-minimalen Einschließung nach (4.43) erreicht werden. Diese Idee stammt aus [Pla06], wird dort aber nur als vereinfachte Prädiktion für die variablen Approximationsrichtungen (4.33) aufgeschrieben. Durch Einsetzen in Gl. (4.43) ergibt sich

$$b_i = \max_{\mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (\mathbf{n}_i^T (\mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^{N_{SB}} p_j \mathbf{A}_j) \mathbf{x}') \quad (4.45)$$

$$\leq \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}') + \max_{\mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} \sum_{j=1}^{N_{SB}} (p_j \underbrace{\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_j \mathbf{x}'}_{f(\mathbf{x}')}), \quad (4.46)$$

wobei die Kurzschreibweise $f(\mathbf{x}') = \mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_j \mathbf{x}'$ im Weiteren verwendet werden soll. Die Überabschätzung entsteht hiernach bereits für einen Parameter p_j , da \mathbf{x}' in beiden Summanden von (4.46) erscheint.

Aus den intervallararithmetischen Eigenschaften (B.1) und (B.7) folgt

$$\max_{p_j, \mathbf{x}}(pf(\mathbf{x})) = \max \left\{ \underline{p}_j \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \bar{p}_j \cdot \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \underline{p}_j \cdot \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \bar{p}_j \cdot \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \right\}. \quad (4.47)$$

Damit erhält man für den rechten Term in Gl. (4.46) eine weitere Überabschätzung für jede weitere Matrix \mathbf{A}_j :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p} \in [\underline{\mathbf{p}}], \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} \sum_{j=1}^{N_{SB}} p_j f(\mathbf{x}') &\leq \sum_{j=1}^{N_{SB}} \max_{\mathbf{p} \in [\underline{\mathbf{p}}], \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (p_j f(\mathbf{x}')) \\ &= \sum_{j=1}^{N_{SB}} \max \{ \bar{p}_j \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (f(\mathbf{x}')), \bar{p}_j \min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (f(\mathbf{x}')), \underline{p}_j \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (f(\mathbf{x}')), \underline{p}_j \min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (f(\mathbf{x}')) \}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$(4.49)$$

wobei pro Summand in Zeile (4.49) zwei lineare Programme zu lösen sind.

Nutzt man des Weiteren die Kenntnis der Vorzeichen von p_j aus, also beispielsweise die aus $\underline{p} < 0$ und $\bar{p} > 0$ folgende Eigenschaft

$$\max_{p_j, \mathbf{x}}(p_j f(\mathbf{x})) = \max \{ \underline{p}_j \cdot \min_{\mathbf{x}} (f(\mathbf{x})), \bar{p}_j \cdot \max_{\mathbf{x}} (f(\mathbf{x})) \}, \quad (4.50)$$

erhält man die Darstellung:

$$b_i \leq \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}') + \sum_{j=1}^{N_{SB}} \max \{ \bar{p}_j \cdot \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (f(\mathbf{x}')), -\underline{p}_j \cdot \min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (f(\mathbf{x}')) \}. \quad (4.51)$$

Der letzte Schritt führt zwar nicht auf eine wesentliche Reduktion des Rechenaufwandes, aber es wird deutlich, dass für die entgegengesetzte Richtung $-\mathbf{n}_i^T$ die linearen Programme im Summenterm (4.51) bereits berechnet sind. Man erhält unter Beachtung von $\max_{\mathbf{x}}(-f(\mathbf{x})) = -\min_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}))$ aus den bereits gelösten linearen Programmen für $-\mathbf{n}_i^T$

$$\beta_i = \max_{\mathbf{p} \in [i], \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (-\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_S(\mathbf{p}) \mathbf{x}') \quad (4.52)$$

$$\leq -\min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}') - \sum_{j=1}^{N_{SB}} \min \{ \bar{p}_j \min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (f(\mathbf{x}')), -\underline{p}_j \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (f(\mathbf{x}')) \}. \quad (4.53)$$

Dieses Ergebniss soll der Übersichtlichkeit halber für die normierte *Strukturierter Beschreibung* als Theorem zusammengefasst werden:

Theorem 1 (*Approximation mit Strukturierter Beschreibung*)

Gegeben sei die *Strukturierter Beschreibung* $\mathbf{A}_S(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^{N_{SB}} p_j \mathbf{A}_j$ der Ordnung N_{SB} in Normalform ($\mathbf{p} \in [i]$) und die Zustandsmenge \mathcal{X}' nach Gl. (4.16). Dann ist eine Einschließung in den Richtungen $\pm \mathbf{n}_i$

$$\mathcal{X}_p \supseteq \mathbf{A}_S(\mathbf{p}) \mathcal{X}' \quad (4.54)$$

der Prädiktion gegeben durch:

$$\mathcal{X}_p = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i^T \\ -\mathbf{n}_i^T \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \tilde{b}_i \\ \tilde{\beta}_i \end{pmatrix} \quad \forall i \right\} \quad (4.55)$$

$$\tilde{b}_i = \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}') + \sum_{j=1}^{N_{SB}} \max\{\max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_j \mathbf{x}'), -\min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_j \mathbf{x}')\} \quad (4.56)$$

$$\tilde{\beta}_i = -\min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x}') - \sum_{j=1}^{N_{SB}} \min\{\min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_j \mathbf{x}'), -\max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_j \mathbf{x}')\} \quad (4.57)$$

Der Aufwand für die Approximation in Richtung $\pm \mathbf{n}_i^T$ kann mit insgesamt $2 + 2N_{SB}$ linearen Programmen angegeben werden.

Damit müssen pro Zeitschritt für die Approximation des autonomen Systems $M_p(2 + 2N_{SB})$ lineare Programme gelöst werden.

Die Einschließungsrichtungen können auch in jedem Zeitschritt neu mit $\mathbf{N}(k)$ festgelegt werden. Je kleiner die Werte in den Matrizen \mathbf{A}_j sind, um so nahe liegender ist es, die aus der Transformation des Vorgängerpolytops mit der nominellen Matrix \mathbf{A}_0 hervorgehenden Richtungen $\mathbf{n}_i^T = \mathbf{m}_i^T \mathbf{A}_0^{-1}$ zu verwenden. Dann folgt aus (4.51) die Darstellung aus [Pla06]:

$$b_i \leq \underbrace{\max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{m}_i^T \mathbf{x}')}_{q_i} + \sum_{j=1}^{N_{SB}} \max\{\max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{m}_i^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_j \mathbf{x}'), -\min_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'}(\mathbf{m}_i^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_j \mathbf{x}')\}, \quad (4.58)$$

Die q_i sind bereits durch das Polytop \mathcal{X}' bekannt. Ohne Eingangssignale bleibt mit diesem Ansatz auch die Anzahl der Ungleichungen konstant. Wenn Eingangssignale vorliegen, muss die Frage beantwortet werden, wie eine unbeschränkt wachsende Anzahl von Hyperebenen zur Einschließung verhindert werden soll (vgl. die Einschließungsrichtungen (4.33)).

Beispiel 4.3: Prädiktion für ein autonomes, ungenau bekanntes System in Strukturierter Beschreibung.

In Abb. 4.3 wird die rekursive Prädiktion des Zustandes für ein ungenau bekanntes, autonomes System zweiter Ordnung dargestellt. Es ist mit

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

durch nur eine unsichere Matrix \mathbf{A}_1 mit $p_1 \in [-1, 1]$ gegeben. Die einfache Abbildung des Vorgängerpolytops (oben, links) führt auf die in blau dargestellte, \mathbf{N} -minimale Approximation (oben, Mitte). Die in grün dargestellten Polytope werden durch Abbildung für verschiedene p_1 ermittelt und grenzen zum Zeitpunkt $k = 1$ an die \mathbf{N} -minimale Approximation. Die Überapproximationen werden in Richtung der mit der nominellen Matrix abgebildeten Kanten $\mathbf{n}_i^T(k) = \mathbf{m}_i^T \mathbf{A}_0^{-1}$ vorgenommen. Sie werden in jedem Zeitschritt neu bestimmt. Für diese Abbildung im \mathbb{R}^2 mit $N_{SB} = 1$ und

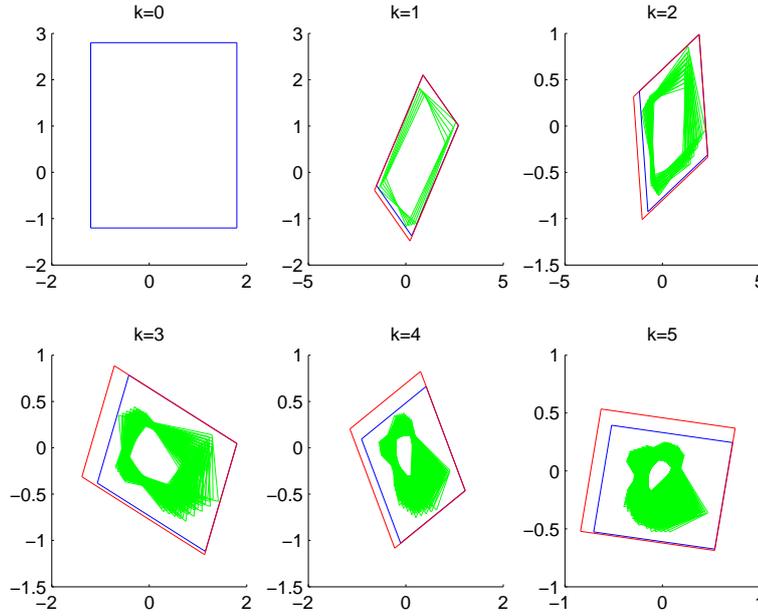


Bild 4.3: Prädiktion mit ungenau bekanntem System

$M_p = 4$ Kanten gelingt die Einschließung mit nur acht linearen Programmen pro Zeitschritt. Im Allgemeinen führt die \mathbf{N} -minimale Einschließung auf eine große Zahl von linearen Optimierungsproblemen. Eine konservativere Einschließung erhält man nach Gleichung (4.58), wobei die Werte von q_i durch die Definition des jeweiligen Vorgängerpolytops gegeben sind. Da symmetrische Richtungen der einschließenden Polytope vorliegen, gelingt die Approximation mit vier linearen Programmen pro Zeitschritt. Das Ergebnis ist durch Polytope mit roten Kanten dargestellt. Mit zunehmender Zeit k werden die berechneten Approximationen in beiden Fällen aufgrund der Fortpflanzung des Fehlers konservativer. \square

Erweiterung um Eingangssignale. Liegen ungenau bekannte Eingangssignale vor, dann ist Gleichung (4.40) entsprechend zu erweitern und man erhält

$$b_i = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T (\mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x}' + \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{u})) \quad (4.60)$$

$$\leq \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (\mathbf{n}_i^T (\mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x}')) + \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{u}). \quad (4.61)$$

Gleichung (4.61) ist im allgemeinsten Fall eine Abschätzung, wenn Parameter der Matrizen $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ voneinander abhängen. In jedem Fall kann die zusätzlich rechte Seite in Gleichung (4.61) exakt so berechnet werden, wie die Zustandsabbildung auf der linken Seite, nach Abschn. 4.3.2 oder mittels Überapproximation nach nach Theorem 1. Für unabhängige Parameterbeschreibungen $\mathbf{A}(\mathbf{p}_1)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{p}_2)$ oder exakt bekannte Matrizen \mathbf{B} gilt in Gleichung (4.61) das Gleichheitszeichen.

Beispiel 4.4: Prädiktion für ein ungenau bekanntes System mit Eingangsunsicherheit.

In diesem Beispiel ist das System wieder durch die Systemmatrix \mathbf{A}_0 und die Unsicherheit p_1, \mathbf{A}_1 nach (4.59) gegeben. Zusätzlich wird ein Eingang

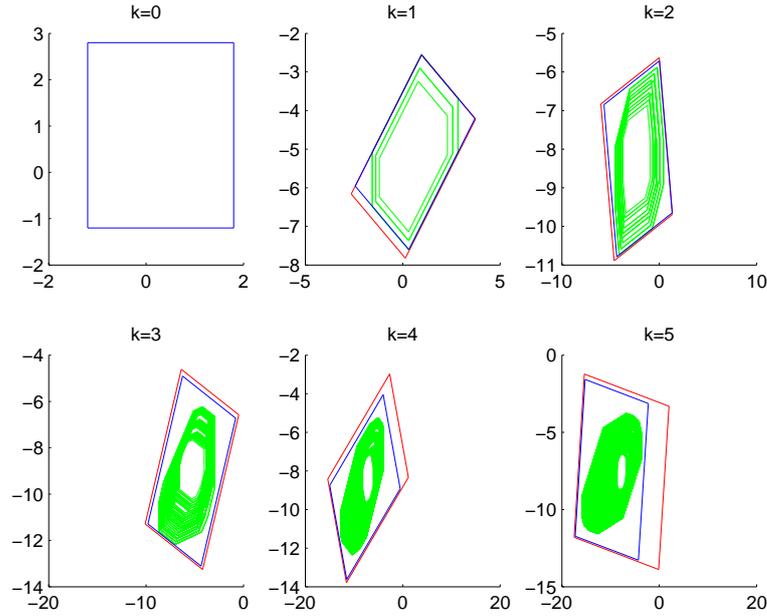


Bild 4.4: Prädiktion mit ungenau bekanntem System

mit

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad -6 \leq u \leq -5 \quad (4.62)$$

betrachtet. In Abb. 4.4 wird ausgehend von der Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0 prädiziert, wobei die dargestellten Mengen unter Verwendung der transformierten Kanten $\mathbf{m}_i^T \mathbf{A}_0^{-1}$ entstehen. Die rot dargestellten Polytope resultieren stellen eine Überapproximation der Zustandsmengen $\mathcal{X}_p^*(k)$ dar. Diese wurden durch punktweise Abbildung näherungsweise ermittelt und in grün dargestellt. Die in blau dargestellten Polytope entstehen aus der \mathbf{N} -minimalen Prädiktion und verbessern die Einschließung. Mit $\mathbf{n}_{1,2}^T = \pm(1, 0)^T$ kann die Einschließung weiter verbessert werden, allerdings bei Zunahme der Komplexität der Polytope. Zum Vergleich sind diese Ergebnisse für \mathbf{N} -minimale Prädiktion (blau) und Überapproximation (rot) in Abb.4.5 dargestellt. \square

Während für die \mathbf{N} -minimale Prädiktion eine bessere Einschließung im Parameterraum auch immer auf kleinere prädizierte Zustandsmengen führt, gilt dies für die hier beschriebene Überapproximation nicht. Aufgrund des Summenterms in Gleichung (4.56) führt die Einführung weiterer unsicherer Parameter p_i zur besseren Einschließung im Parameterraum möglicherweise auf eine konservativere Einschließung der prädizierten Zustandsmenge.

Bisher wurde in diesem Abschnitt systematisch ein Überapproximation durch Auswertung der Summenterme der *Strukturierten Beschreibung* durchgeführt und dabei von unabhängigen Beschreibungen $\mathbf{A}_S(\mathbf{p})$ und $\mathbf{B}_S(\mathbf{p})$ ausgegangen. Wenn es aber wichtig ist, eine Abhängigkeit der Parameter beider Matrizen präzise zu formulieren, um dann über mehrere unsichere Parameter zu approximieren, dann ergibt sich für normierte

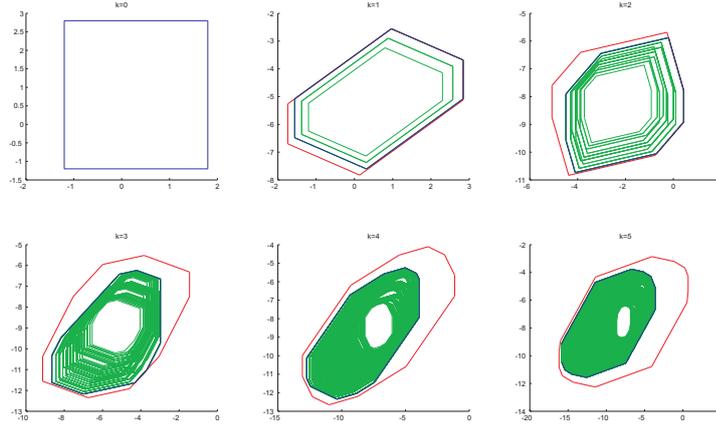


Bild 4.5: Prädiktion mit ungenau bekanntem System unter Verwendung zusätzlicher Approximationsrichtungen

Strukturierte Beschreibung ($\mathbf{p} \in [i]$) die folgende Darstellung

$$b_i = \max_{\mathbf{p} \in [i], \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T ([\mathbf{A}, \mathbf{B}]_0 + \sum_{j=1}^{N_{SB}} p_j [\mathbf{A}, \mathbf{B}]_j) \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}) \quad (4.63)$$

$$\leq \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T [\mathbf{A}, \mathbf{B}]_0 \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}) + \sum_{j=1}^{N_{SB}} \max_{\mathbf{x}'} \{ \max_{\mathbf{x}'} (\mathbf{n}_i^T ([\mathbf{A}, \mathbf{B}]_j \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}), \quad (4.64)$$

$$- \min_{\mathbf{x}'} (\mathbf{n}_i^T ([\mathbf{A}, \mathbf{B}]_j \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix})) \} \quad (4.65)$$

als systematische Erweiterung von (4.56) auf ungenau bekannte Eingangssignale.

4.3.2. Prädiktion für *Polytope Beschreibung*

Ausgangspunkt sei nochmal die Gl. (4.60), wobei unsichere Parameter jetzt durch die *Polytope Beschreibung* $\mathbf{A}_P(\mathbf{p})$ und $\mathbf{B}_P(\mathbf{p})$ vorliegen können. Das Ziel ist eine Rechenvorschrift zur Ermittlung der Elemente b_i , welche mit $\mathbf{n}_i^T \mathbf{x} \leq b_i$ eine \mathbf{N} -minimale Einschließung der Prädiktion in Richtung \mathbf{n}_i darstellen. Wie bereits dargestellt gilt das Gleichheitszeichen in Gl.(4.61) nur für unabhängige Beschreibungen in den beiden Matrizen, also:

$$b_i = \max_{\mathbf{p}_1 \in \mathcal{P}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'} (\mathbf{n}_i^T (\mathbf{A}(\mathbf{p}_1) \mathbf{x}')) + \max_{\mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}, \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T \mathbf{B}(\mathbf{p}_2) \mathbf{u}) \quad (4.66)$$

Im Allgemeinen liegen die unsicheren Parameter in der Form

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}](\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N_{PB}} p_j [\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j] \quad (4.67)$$

vor mit der Nebenbedingung

$$\mathcal{P} := \{ \mathbf{p} \mid \sum_{i=1}^{N_{PB}} p_i = 1, p_i \geq 0 \}. \quad (4.68)$$

Die Elemente $[\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j]$ sind die Eckpunkte eines Polytops im Parameterraum. Damit können Abhängigkeiten der unsicheren Parameter in der Eingangs- und Zustandsübergangsmatrix mit berücksichtigt werden

Theorem 2 (*N-minimale Polytope Approximation*)

Gegeben sei die *Polytope Beschreibung* (4.67) der Ordnung N_{PB} und die Zustandsmenge \mathcal{X}' nach Gl. (4.16). Dann ist eine Einschließung der Prädiktion in den Richtungen \mathbf{n}_i

$$\mathcal{X}_p \supseteq \mathbf{A}_P(\mathbf{p})\mathcal{X}' + \mathbf{B}_P(\mathbf{p})\mathcal{U} \quad (4.69)$$

gegeben durch:

$$\mathcal{X}_p = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{n}_i^T \cdot \mathbf{x} \leq b_i, \forall i \right\}, \quad (4.70)$$

$$b_i = \max_j \left\{ \max_{(\mathbf{x}', \mathbf{u}) \in \mathcal{X}'\mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T [\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j] \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}) \right\} \quad (4.71)$$

Der Aufwand für die Approximation in Richtung \mathbf{n}_i^T kann mit N_{PB} linearen Programmen im \mathbb{R}^{n+m} angegeben werden. Die Einschließung ist **N**-minimal.

Beweis: Durch Einsetzen der Definitionsgleichung (4.67) in den rechten Summanden von Gl. (4.60) erhält man

$$b_i = \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}} (\mathbf{n}_i^T (\mathbf{A}_P(\mathbf{p})\mathbf{x}' + \mathbf{B}_P(\mathbf{p})\mathbf{u})) \quad (4.72)$$

$$= \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}} (\mathbf{n}_i^T \sum_{k=1}^{N_{PB}} p_k [\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k] \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}) \quad (4.73)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N_{PB}} \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}} (p_k \mathbf{n}_i^T [\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k] \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}) \quad (4.74)$$

$$= \sum_{k=1}^{N_{PB}} \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} (p_k \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T [\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k] \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix})) \quad (4.75)$$

Die Überabschätzung in Gl. (4.74) ergibt sich zunächst mathematisch aus der Verschiebung des Maximum-Operator in die Summe. Im Folgenden zeigt sich aber, dass nach wie vor Gleichheit gilt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (4.68). Mit dieser wird das Maximum angenommen, wenn der größte Summand mit $p_k = 1$ gewichtet wird und damit alle anderen Terme wegfallen, also $p_{k_{max}} = 1, p_j = 0$ für $j \neq k_{max}$,

$$\sum_{k=1}^{N_{PB}} \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} (p_k \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T [\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k] \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix})) \quad (4.76)$$

$$= \max_k \left\{ \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T [\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k] \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}) \right\} = b_i. \quad (4.77)$$

Daraus folgt die Gleichheit in (4.74). Da in der Herleitung keine Abschätzung nötig ist, folgt die **N**-Minimalität der Berechnung. \square

Für den Spezialfall unabhängiger oder verschwindender Parameterunsicherheiten in *Polytope Beschreibung* gilt natürlich auch Gleichung (4.66). Die Auswertung erfolgt

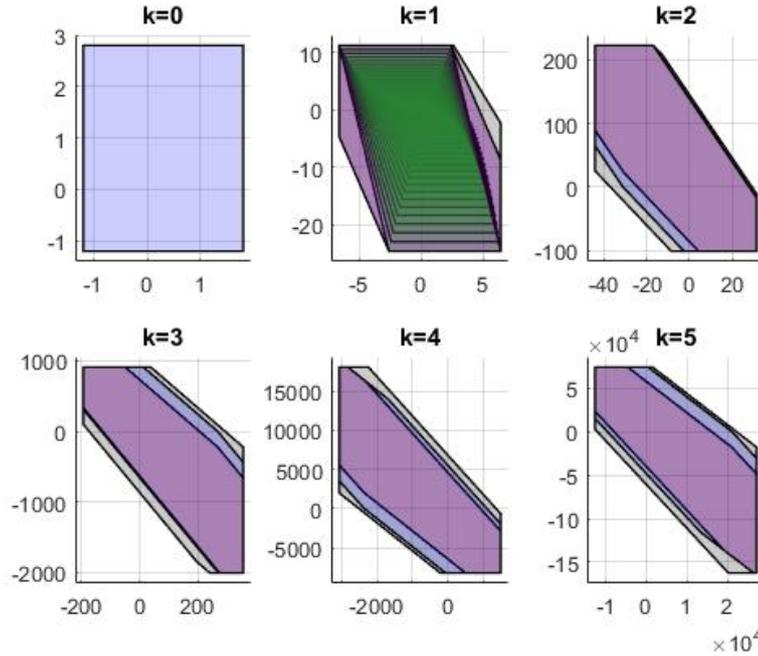


Bild 4.6: Prädiktion mit *Polytope Beschreibung* für verschiedene Modelle

dann nach

$$b_i = \max_k \{ \max_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} (\mathbf{n}_i^T \mathbf{A}_k) \mathbf{x}' \} + \max_k \{ \max_{u \in \mathcal{U}} (\mathbf{n}_i^T \mathbf{B}_k) u \}. \quad (4.78)$$

Beispiel 4.5: Prädiktion mit *Polytope Beschreibung*.

In Abb. 4.6 wird die rekursive Prädiktion des Zustandes für das ungenau bekannte System aus Beispiel 4.4 gezeigt. Für den ersten Zeitschritt sind zum Vergleich punktweise mit der Parameterunsicherheit abgebildete Mengen dargestellt. Das System mit der unsicheren Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{s})$ wurde um einen Eingangsvektor $\mathbf{b} = (0 \ 1)^T$ und den konstanten Eingang $u \in [-0.5, 0.5]$ erweitert. Die polytope Prädiktion wird hier auf die abgeleiteten Modelle $\mathcal{M}_I, \mathcal{M}_{S,1}$ und \mathcal{M}_P angewendet unter Verwendung der selben Einschließungsrichtungen in allen drei Fällen. Für den ersten Zeitschritt sind zum Vergleich punktweise mit der Parameterunsicherheit abgebildete Mengen dargestellt (grün). Neben der achsenparallelen Einschließung, beginnend mit $\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} | \mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$, wurde zusätzlich in den festen Richtungen $\mathbf{M}\mathbf{A}_0^{-1}$ und $\mathbf{M}\mathbf{A}_0^{-2}$ approximiert. Die Qualität der N -minimalen Einschließung hängt von den abgeleiteten Modellen ab.

Da es sich um ein instabiles System handelt, expandieren die prädizierten Zustandsmengen über der Zeit deutlich. Die äußeren Mengen (grau) entstehen aus der Verwendung der Intervallmatrix (3.28) und die (blau) dargestellten Mengen bei Prädiktion mit der *Strukturierten Beschreibung* (3.36). \square

Für die exakte Prädiktion bei nicht-invertierbaren Systemmatrizen wurde das Polytop

(4.31) formuliert. In Erweiterung für die *Polytope Beschreibung* erhält man

$$\mathcal{P}_j = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u})^T \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \mid \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{A}_j & -\mathbf{B}_j \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_j & \mathbf{B}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_u \end{pmatrix} \right\} \quad (4.79)$$

Die Formulierung im erweiterten Zustands-/Eingangsraum wurde für die Ermittlung \mathbf{N} -minimaler Einschließungen nach Gl. (4.39) vorgeschlagen, was für unsichere Parameter auf die folgende Erweiterung führt:

$$b_i = \max_j \left\{ \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in \mathcal{P}_j} (\tilde{\mathbf{n}}_i^T \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T) \right\}, \quad j \in \{1, \dots, N_{PB}\}, \quad i \in \{1, \dots, M_p\} \quad (4.80)$$

Die Polytope \mathcal{P}_j entstehen durch Bildung aller Eckpunkte $[\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j]$ oder der Kombinationen unabhängiger Beschreibungen \mathbf{A}_j und \mathbf{B}_j . Nachteilig ist wieder die hohe Dimension des erweiterten Raumes. Allerdings ergeben sich aus dieser allgemeinen Formulierung auch Vorteile, welche in späteren Kapiteln ausgenutzt werden. In [Neu04] wird beispielsweise angegeben, wie Inverse $[\mathbf{A}]^{-1}$ von Intervallmatrizen $[\mathbf{A}]$ berechnet werden können.

In Beispiel 6.5 wird exemplarisch gezeigt, dass es möglich sein kann, eine Einschließung

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})^{-1} \supseteq \mathbf{A}(\mathbf{p})^{-1} \supseteq \mathbf{A}(\mathbf{s})^{-1} \quad (4.81)$$

zu berechnen, wobei $\mathbf{A}(\mathbf{q})^{-1}$ eine *Polytope Beschreibung* oder ein Spezialfall dieser ist, jetzt mit dem Parameter \mathbf{q} darstellt. Wenn diese Matrix vorliegt, kann auch die Darstellung (4.24) zur Berechnung einer Approximation der Prädiktion verwendet werden

$$\mathcal{P}_j = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{A}_j^{-1} & -\mathbf{M}\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_u \end{pmatrix} \right\} \quad (4.82)$$

Die in der Regel gemachte Überapproximation in Gl. (4.81) bedeutet, dass durch die Auswertung analog zu Gl. (4.80) keine \mathbf{N} -minimalen Zustandsmengen prädiziert werden.

4.3.3. Einfluss der unsicheren Parameter (bei *Strukturierter Beschreibung*)

In diesem Abschnitt soll zunächst phänomenologisch untersucht werden, welche Effekte durch Unbestimmtheiten in den Systemparametern auftreten können. Durch eine entsprechende Analyse für ein vorliegendes Modell erhält man Hinweise auf eine geeignete Wahl zusätzlicher Einschließungsrichtungen.

Systeme zweiter Ordnung. Die Betrachtung von Systemen der Ordnung $n = 2$ ermöglicht einerseits eine anschauliche Darstellung von Polytopen im Zustandsraum und andererseits mit vertretbarem Aufwand die Berechnung prädizierter Mengen durch punktweise Abbildung des Vorgängerpolytops \mathcal{X}' zur Darstellung grundlegender Effekte. Im \mathbb{R}^2 sind Halbräume durch Geraden definiert. Durch die Schnittmenge von Halbebenen werden Polytope definiert, die von Kanten begrenzt sind.

Die Transformation eines Polytops durch eine unbestimmte Matrix führt im Allgemeinen auf eine nichtkonvexe Menge \mathcal{X}_p^* , was in Beispiel 4.3.3 gezeigt wird. Hier entsteht eine beschränkte Bildmenge, deren Kanten einerseits aus der Abbildung des Vorgängerpolytops mit bestimmten Repräsentanten von $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ hervorgehen, wobei auch nichtkonvexe Mengen entstehen können. Andererseits entstehen durch die Verschiebung des Bildpolytops mit den unsicheren Parametern \mathbf{p} neue Randbereiche der Bildmenge.

Beispiel 4.6: Nichtkonvexe Bildmenge bei der Prädiktion mit ungenau bekannten Parametern.

In diesem wie auch in den folgenden Beispielen wird die Transformation eines Polytops mit der unsicheren Matrix

$$\mathbf{A}_S(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + \sum_j p_j \mathbf{A}_j \quad (4.83)$$

mit

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

gezeigt. Der Einfachheit halber wird nur die Abbildung der Randpunkte des Polytops punktweise für die zulässigen \mathbf{p} durchgeführt. Für jede Abbildung mit festem \mathbf{p} und regulärem $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ ist anhand der Transformationsgleichung (4.17) sichergestellt, dass alle inneren Punkte des Polytops auch innere Punkte der hier skizzierten Bildmenge sind. Zunächst ist die Unbestimmtheit nur durch die Matrix

$$\mathbf{A}_{1,a} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

gegeben mit dem Parameter $p_1 \in [-1, 1]$. Da es von Bedeutung ist, dass unter bestimmten Bedingungen Kanten mit einer Ausrichtung entstehen, die unabhängig vom Vorgängerpolytop ist, werden hier Abbildungsergebnisse mit verschiedenen Vorgängerpolytopen \mathcal{X}' dargestellt. In Abbildung 4.7 sind verschiedene, aus dem Ursprung verschobene und/oder gedrehte Vorgängerpolytope (blau) und die dazu gehörigen Abbildungsergebnisse (grün) zu sehen. Man erkennt, dass schon ein unsicherer Parameter auf nicht-konvexe Bildmengen führen kann. Die Verschiebung der Bildmengen erfolgt auf den hier gestrichelt gekennzeichneten Kanten mit dem Richtungsvektor

$$\mathbf{v} = (1, 0)^T \quad (4.86)$$

Diese Verschiebungsrichtung erweist sich als unabhängig von Vorgängerpolytop, von welchem nur die Länge der Kanten abhängt. Für den in Abb. 4.8 dargestellten singulären Sonderfall, bei dem das Vorgängerpolytop Eckpunkte bei $x_1 = 0$ aufweist, entstehen keine Kanten des Bildpolytops in Richtung \mathbf{v} .

Die Abbildung mit der Matrix $\mathbf{A}_{1,b}$

$$\mathbf{A}_{1,b} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

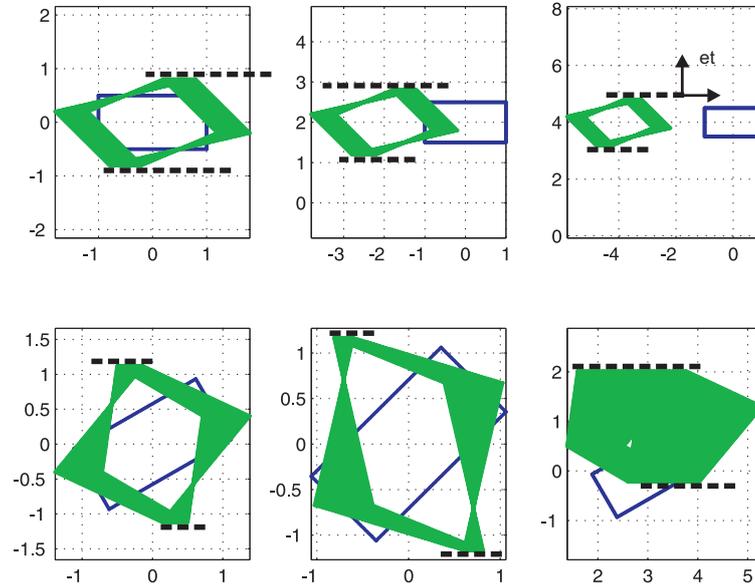


Bild 4.7: Abbildung verschiedener Polytope (blau) mit Unsicherheit in der Systemmatrix nach Gl. (4.85) und fester Richtung η

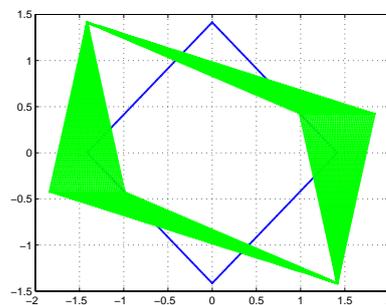


Bild 4.8: Singulärer Sonderfall: Vorgängerpolytop und Bildpolytop ohne neue Kante mit Normalenvektor η

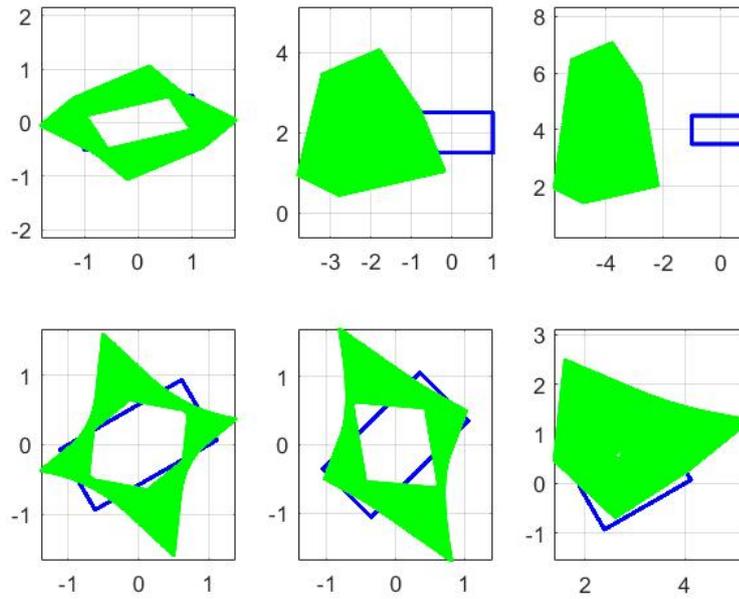


Bild 4.9: Abbildung verschiedener Polytope (blau) mit Unsicherheit in der Systemmatrix nach Gl. (4.87) ohne feste Richtung

führt im Allgemeinen auf nicht-konvexe Mengen. Die Orientierung der Randmengen hängt aber vom Vorgängerpolytop ab, wie Abb. 4.9 zeigt. Feste Richtungen liegen in den verschiedenen Bildmengen nicht vor. \square

Es soll nun untersucht werden, für welche Richtungen und unter welchen Bedingungen unabhängig vom Vorgängerpolytop \mathcal{X}' (fast) immer Kanten mit der selben Orientierung in der Bildmenge auftreten. Dabei soll von nur einer unsicheren Matrix \mathbf{A}_j ausgegangen werden. Die folgende Definition bedeutet anschaulich, dass die Richtung der Verschiebung eines mit \mathbf{A}_0 abgebildeten Polytops durch die Parameterunsicherheit in einer Richtung \mathbf{v} unabhängig von \mathbf{x} erfolgen muss:

Definition 7 (Feste Richtung im \mathbb{R}^2)

Eine feste Richtung $\boldsymbol{\eta}$ im \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\eta} : \exists \mathbf{v} \perp \boldsymbol{\eta}, \text{ so dass für } \mathbf{A}_j \neq \mathbf{0} \text{ gilt} \quad (4.88)$$

$$\frac{\mathbf{A}_j \mathbf{x}}{|\mathbf{A}_j \mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \neq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \{\mathbf{0}\}. \quad (4.89)$$

Dies wird genau dann erreicht, wenn der durch die Abbildung mit der Matrix \mathbf{A}_j verursachte Rangabfall eins beträgt. \mathbf{v} gehört dann zum Bildraum nach Gl. (A.42) der Abbildung mit \mathbf{A}_j ,

$$\text{imag}(\mathbf{A}_j) = c \cdot \mathbf{v}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (4.90)$$

$\boldsymbol{\eta}$ ist orthogonal zum Bildraum.

Die Verschiebungsrichtung und damit die Ausrichtungen der neuen Kanten ist durch den Eigenvektor \mathbf{v} der singulären Matrix \mathbf{A}_j zum nicht verschwindenden Eigenwert

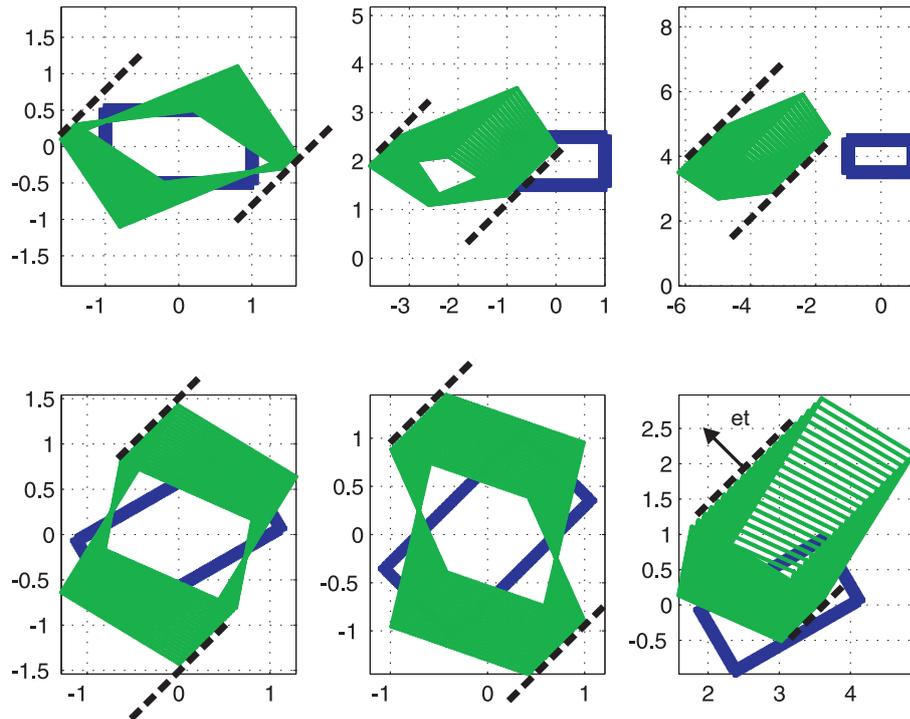


Bild 4.10: Abbildung verschiedener Polytope (blau) mit unsicherer Matrix (4.92). η_a definiert die feste Richtung

gegeben. Sie wird hier als feste Richtung bezeichnet und durch die zugehörigen Normalenvektoren $\pm\eta$ mit $\pm\eta \perp \mathbf{v}$ charakterisiert. In dieser Richtung erfolgt keine Verschiebung des Polytops. Das Entstehen der neuen Kanten kann man sich als Abbildung von \mathcal{X}' mit \mathbf{A}_0 und anschließender Verschiebung mit $p_j\mathbf{v}$ vorstellen.

Ein Rangabfall von eins für eine Abbildungsmatrix bedeutet im \mathbb{R}^n , dass der Bildraum die Dimension $n - 1$ hat und ein eindimensionaler Nullraum (siehe Gl. (A.41)) existiert:

$$\dim(\text{kern}(\mathbf{A}_j)) = 1 \quad (4.91)$$

In diesem Fall gibt es im Bildraum also eine Richtung, in der die Parameterunsicherheit keine Verschiebung bewirkt.

Wenn Eckpunkte des Vorgängerpolytops im Nullraum liegen, tritt der singuläre Sonderfall ein. In Beispiel 4.6 liegen zwei Eckpunkte bei $x_1 = 0$, so dass keine feste Richtung $\pm\eta$ entsteht.

Beispiel 4.7: Feste Richtungen bei der Prädiktion mit unsicheren Parametern.

Die Transformation der Polytope aus Beispiel 4.6 wird jetzt mit identischer nomineller Matrix (4.84) durchgeführt. Die Parameterunsicherheit ist durch

$$\mathbf{A}_{1,a} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

und dem Parameter $p_1 \in [-1, 1]$ gegeben. Die Matrix ist singulär und der Rangabfall beträgt eins. Die in blau dargestellten Vorgängerpolytope weisen

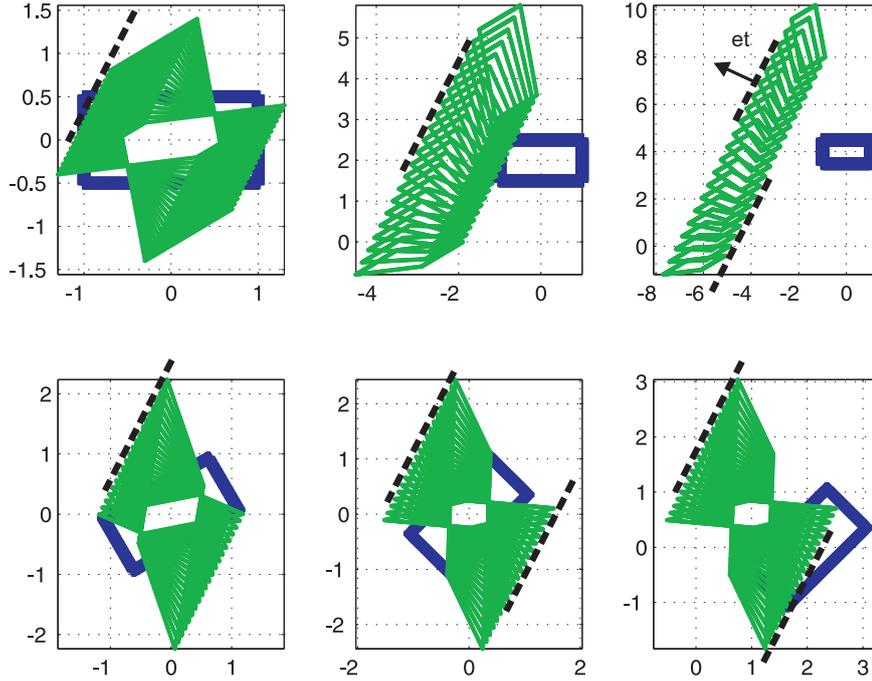


Bild 4.11: Abbildung verschiedener Polytope mit unsicherer Matrix (4.97). $\boldsymbol{\eta}_b$ definiert die feste Richtung

in keinem Fall Eckpunkte im Nullraum

$$\text{kern}(\mathbf{A}_{1,a}) = c \cdot (1, -1)^T \quad (4.93)$$

auf. Die Transformationsergebnisse sind in Abbildung 4.10 dargestellt. In allen Abbildungsergebnissen erkennt man neue Kanten in der Richtung

$$\text{imag}(\mathbf{A}_{1,a}) = \mathbf{v}_a = (1, 1)^T, \quad (4.94)$$

die durch den Eigenvektor zum nicht verschwindenden Eigenwert $\lambda_1 = 0.4$ der Matrix $\mathbf{A}_{1,a}$ gegeben ist. Die neue Richtung ergibt sich daraus, dass die Unsicherheit in p_1 auf

$$p_1 \mathbf{A}_{1,a} \mathbf{x} = 0.2 p_1 (1, 1)^T (x_1 + x_2) \quad (4.95)$$

führt. Der Normalenvektor zu \mathbf{v}_a wurde als feste Richtung definiert:

$$\boldsymbol{\eta}_a = (-1, 1)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.96)$$

Es handelt sich bei $\boldsymbol{\eta}_a$ um den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$, welcher die Richtung angibt, in die keine Verschiebung des Polytops stattfindet.

In Abbildung 4.11 werden Transformationen der Polytope mit der Matrix \mathbf{A}_0 und der Unsicherheit

$$\mathbf{A}_{1,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

dargestellt. Eine Abbildung mit der Matrix $\mathbf{A}_{1,b}$ verursacht einen Rangabfall von eins. Der Eigenvektor der Matrix zum Eigenwert $\lambda_1 = 1.2$ ist mit

$$\mathbf{v}_b = (-1.2, 0.6)^T \quad (4.98)$$

gegeben und man erhält den Normalenvektor der gesuchten festen Richtung

$$\boldsymbol{\eta}_b = (0.6, 1.2)^T / |\boldsymbol{\eta}_b| \quad (4.99)$$

als Eigenvektor zu $\lambda_2 = 0$. \square

Im Folgenden soll eine *Strukturierte Beschreibung* mit $N_{SB} = 2$ betrachtet werden. Es stellt sich die Frage, welche Bildpolytope entstehen können, wenn zwei unabhängigen Parameter p_1, p_2 vorliegen. Dabei liegen im folgenden Beispiel durch die Matrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 reine Verschiebungen des nominell abgebildeten Polytops vor, weshalb die festen Richtungen, die durch die einzelnen Matrizen definiert werden, erhalten bleiben.

Beispiel 4.8: Strukturierte Beschreibung zweiter Ordnung.

In diesem Beispiel erfolgt die Transformation der Polytope mit der nominellen Matrix \mathbf{A}_0 nach Gleichung (4.84), wobei die Unsicherheit durch zwei singuläre Matrizen wie folgt gegeben ist:

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + p_1 \mathbf{A}_1 + p_2 \mathbf{A}_2 \quad (4.100)$$

$$= \mathbf{A}_0 + p_1 \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

$$\text{mit } p_1, p_2 \in [-1, 1]. \quad (4.102)$$

Man erkennt, dass die resultierenden Bildmengen sowohl Kanten in Richtung

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1)^T \quad (4.103)$$

entsprechend Beispiel 4.6, als auch in Richtung

$$\mathbf{v}_2 = (-1, 1)^T \quad (4.104)$$

entsprechend Beispiel 4.7 aufweisen. \square

Die feste Richtung nach Definition 7 stellt eine Erweiterung des Ansatzes aus [dL08] dar, wo lediglich Nullzeilen oder -spalten auf neue Einschließungsrichtungen hinweisen. Die Effektivität des Ansatzes hängt insgesamt vom Einzelfall ab. Andere Aspekte wie eine gleichmäßige Verteilung von Einschließungsrichtungen spielen eine wichtige Rolle. Im Folgenden soll versucht werden, die Idee der festen Richtung auf Abbildungen in höheren Dimensionen zu verallgemeinern.

Systeme dritter Ordnung. Für Systeme der Dimension $n = 3$ ist die Transformation von Polytopen der geometrischen Vorstellung noch zugänglich. Polytope werden durch Ebenen begrenzt. Zunächst werden wieder Unbestimmtheiten betrachtet, die durch nur eine Matrix \mathbf{A}_1 beschrieben werden. Ist die im zweidimensionalen angegebene Bedingung (4.88), übertragen auf den \mathbb{R}^3 ,

$$\frac{\mathbf{A}_1 \mathbf{x}}{|\mathbf{A}_1 \mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \neq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \{\mathbf{0}\} \quad (4.105)$$

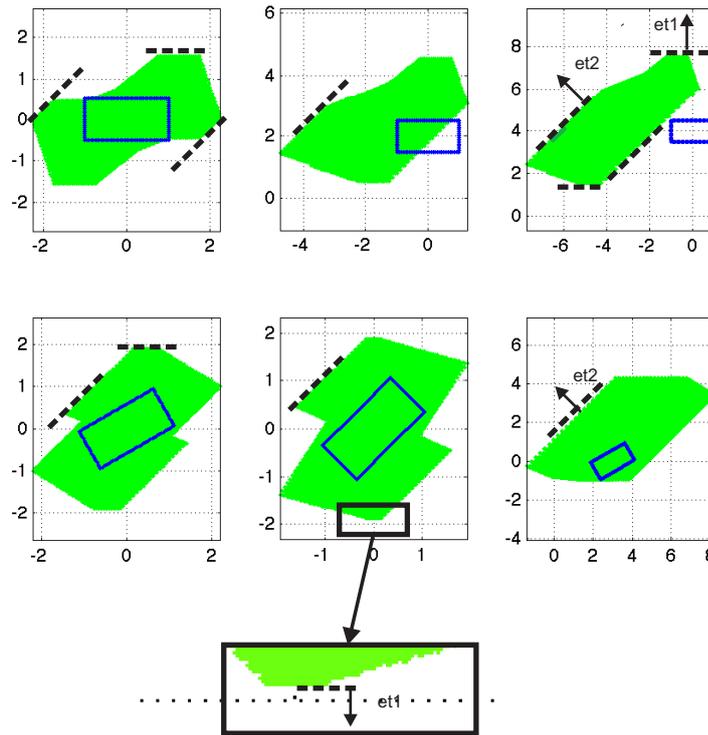


Bild 4.12: Abbildung verschiedener Polytope mit unsicherer Matrix (4.100)

erfüllt, so liegt eine Verschiebung einzelner Punkte nur in Richtung \mathbf{v} des dreidimensionalen Zustandsraumes vor. Die Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Matrix \mathbf{A}_1 einen Rangabfall um zwei aufweist. Man erhält \mathbf{v} als Eigenvektor zum nichtverschwindenden Eigenwert der Matrix. In den dazu orthogonalen Richtungen findet keine Verschiebung des Polytopes statt. Das folgende Beispiel zeigt aber auch, dass es schwierig ist allgemeine Schlüsse für die Wahl von Einschließungsrichtungen daraus zu ziehen.

Beispiel 4.9: Transformation von Polytopen im \mathbb{R}^3 .

In diesem Beispiel wird der Einfachheit halber die Transformation eines Polytops mit der Einheitsmatrix $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}_3$ vorgenommen, wobei die Unsicherheit durch die Matrix

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

mit dem Parameter $p_1 \in [-1, 1]$ gegeben ist. Es wird die Transformation von transformierten Einheitswürfeln in verschiedenen Lagen im Zustandsraum demonstriert durchgeführt. Die Ergebnisse zeigt Abb. 4.13, wobei in schwarz die Kanten von Bildpolytope für verschiedene p erkennbar sind. Der Eigenvektor

$$\mathbf{v} = (1, 0, 0)^T \quad (4.107)$$

zum Eigenwert $\lambda_1 = 0.5$ bezeichnet die durch die Unbestimmtheit verursachte Verschiebungsrichtung. Die dazu orthogonalen Vektoren

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (0, 1, 0)^T \text{ und } \boldsymbol{\eta}_2 = (0, 0, 1)^T \quad (4.108)$$

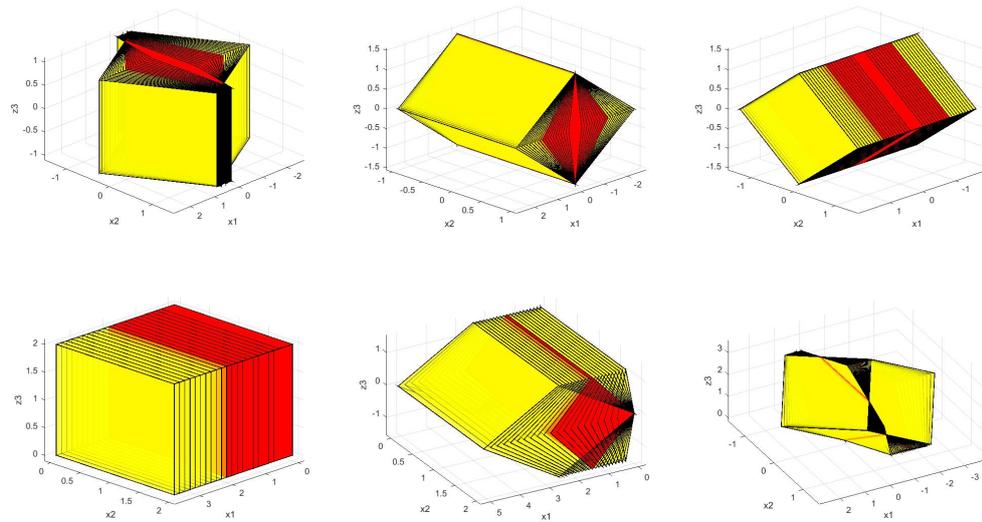


Bild 4.13: Abbildung der Einheitswürfel mit der Unsicherheit nach Matrix (4.106)

definieren als Linearkombination schwache Richtungen. Allerdings zeigen die Transformationen in Abb. 4.13 (oben rechts), dass die $\boldsymbol{\eta}_{1,2}$ keineswegs feste Richtungen, also Ebenen im \mathbb{R}^3 darstellen, die als Grenzflächen der Abbildung unabhängig vom Vorgängerpolytop auftreten. Die Bildmengen sind teilweise nicht-konvex. In rot sind teilweise die Originalpolytope zu erkennen. \square

Liegen zwei Matrizen vom Rang eins vor, welche eine polytope Verschiebung in den Richtungen \boldsymbol{v}_1 und \boldsymbol{v}_2 bewirken, dann entsteht Bildmenge \mathcal{X}_p^* mit ebener Randfläche in Richtung $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$, für fast alle Urbildpolytope (mit Ausnahme von singulären Lagen).

Eine solche Richtung soll in Analogie zum \mathbb{R}^2 als feste Richtungen bezeichnet werden. Ein Versuch der formalen Definition wird hier angegeben:

Definition 8 (Feste Richtung im \mathbb{R}^3)

Eine feste Richtung $\boldsymbol{\eta}$ im \mathbb{R}^3 ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\eta} : \exists \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{\eta} \text{ und } \boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2 \neq 0, \text{ so dass} \quad (4.109)$$

$$(\boldsymbol{A}_S(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{x} = c_1(\boldsymbol{x}, p_1)\boldsymbol{v}_1 + c_2(\boldsymbol{x}, p_2)\boldsymbol{v}_2,$$

$$\text{mit } c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_j \text{kern}(\boldsymbol{A}_j), j > 0. \quad (4.110)$$

Durch den Normalenvektor wird also eine Ebene $\boldsymbol{\eta}$ definiert. Die Verschiebung in der damit beschriebenen Ebene wird durch die Parameter p_i verursacht. Solche Ebenen entstehen nur dann (fast immer), wenn zwei unabhängige Verschiebungen eines nominalen Bildpolytops auftreten. In singulären Lagen des Vorgängerpolytops, wenn hier Eckpunkte des Polytops im Kern der Matrizen \boldsymbol{A}_j liegen, kann es sein, dass in der Bildmenge die Randfläche verschwindet.

Beispiel 4.10: Transformation von Polytopen im \mathbb{R}^3 mit fester Richtung.

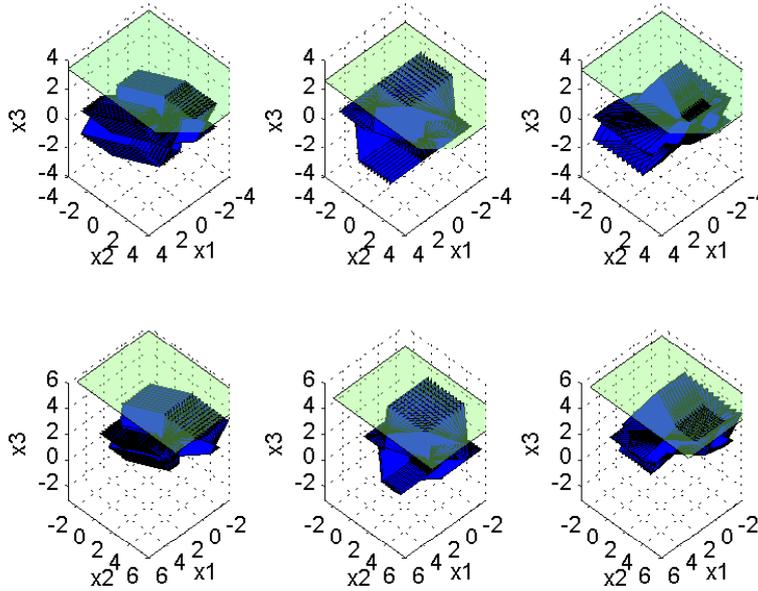


Bild 4.14: Bildmengen der Abbildung verschiedener Vorgängerpolytope mit Unsicherheit nach Matrix (4.112)

Es wird die Abbildung von verschiedenen, durch Rotation, Streckung und Verschiebung entstehenden Polytopen \mathcal{X}' mit der Matrix

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

gezeigt, wobei Unsicherheiten in Form der Matrizen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.112)$$

mit den Parametern $p_{1,2} \in [-1, 1]$ gegeben sind. Die Matrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 weisen jeweils einen Rangabfall von zwei auf, wobei die Eigenvektoren zu den nicht verschwindenden Eigenwerten durch

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)^T \quad (4.113)$$

gegeben sind und damit eine als feste Richtung bezeichnete Ebene aufspannen. Mit

$$\boldsymbol{\eta} \perp \mathbf{v}_i \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.114)$$

erhält man die feste Richtung

$$\boldsymbol{\eta} = (0, 0, 1)^T. \quad (4.115)$$

Eine neue Grenzfläche in Richtung $\boldsymbol{\eta}$ tritt bei Abbildung von fast jedem Vorgängerpolytop in der Bildmenge auf, wie in Abb. 4.14 erkennbar ist. Eine

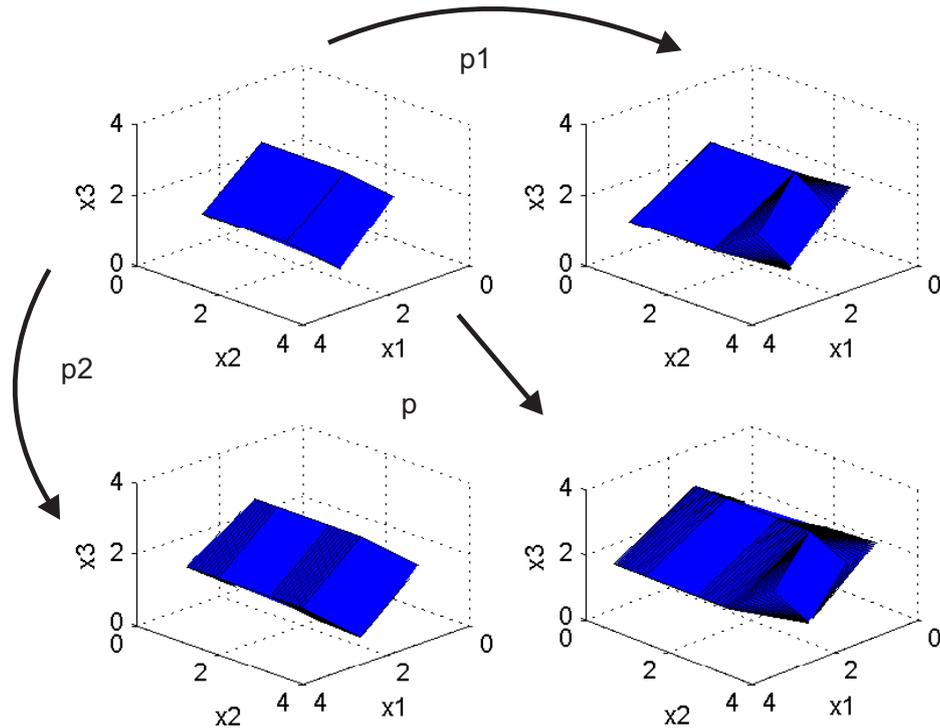


Bild 4.15: Abbildung eines Vorgängerpolytops in singulärer Lage

singuläre Ausnahme, für die Abbildung mit der Einheitsmatrix $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}_3$ und Unsicherheiten \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 nach Gleichung (4.112), ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Die obere und untere Kante des Vorgängerpolytops (Abb. 4.15, oben links) liegen bei $x_1 = 0$, weshalb durch die Unbestimmtheit \mathbf{A}_1 keine Verschiebung der Bildkante entsteht (Abb. 4.15, oben rechts). Deshalb entsteht hier bei Berücksichtigung beider Unbestimmtheiten insgesamt eine Bildmenge, ohne eine echte Randfläche in der festen Richtung aufzuspannen (Abb. 4.15, unten rechts). \square

Die hier verfolgte Idee ist es, anhand der Eigenschaften der unsicheren Matrizen einer *Strukturierten Beschreibung* günstige Einschließungsrichtungen zu ermitteln. Eine feste Richtung soll eine Richtung bezeichnen, die fast aus jedem Polytop durch Abbildung $\mathbf{A}_S(\mathbf{p})$ als echte Randmenge von \mathcal{X}_p^* entsteht. Auf eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen soll verzichtet werden. Es bleibt offen, wann genau eine solche Menge entsteht.

Ein anderer Ansatz zur Ermittlung günstiger Einschließungsrichtungen stellt die Frage, ob es Richtungen gibt, welche bei Abbildung mit einer unsicheren Matrix keine Lösung linearer Programme erfordern. Dazu sei wieder $\mathbf{A}_S(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{p}_1 \mathbf{A}_1$, $\mathbf{p}_1 \in [-1, 1]$ betrachtet und $\mathbf{m}^T \mathbf{x} \leq b$ eine Richtung im Bildraum mit der Eigenschaft

$$\mathbf{m} \in \text{kern}(\mathbf{A}_1^T) \quad (4.116)$$

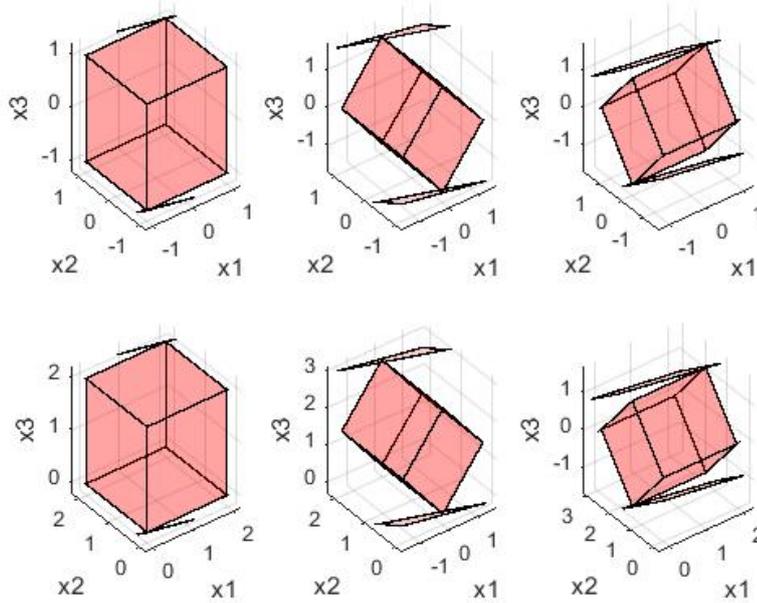


Bild 4.16: Verschiedener Vorgängerpolytope mit Einschließung.

Die Transformation mit der Inversen einer Matrix ist nach Gl. (A.58) mit

$$\mathbf{m}^T (\mathbf{A}_0 + p_1 \mathbf{A}_1) \mathbf{x} \leq b \quad (4.117)$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{m}^T \mathbf{A}_0 + p_1 \underbrace{\mathbf{m}^T \mathbf{A}_1}_{=(\mathbf{A}_1^T \mathbf{m})^T = 0}) \mathbf{x} \leq b \quad (4.118)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{m}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{x} \leq b \quad (4.119)$$

Ist also die Einschließung in Richtung $\mathbf{m}^T \mathbf{A}_0$ im Urbildraum bekannt, erhält man kostenlos die Einschließung in Richtung \mathbf{m} im Bildraum dazu. Das folgende Beispiel zeigt, dass aufgrund der Eigenschaften der unsicheren Matrizen bestimmte Randmengen, so sie denn für das Vorgängerpolytop ermittelt wurden, ohne lineare Programmierung im Bildraum angegeben werden können.

Beispiel 4.11: Transformation von Polytopen im \mathbb{R}^3 .

Es wird die Abbildung von verschiedenen, durch Rotation, Streckung und Verschiebung entstehenden Polytopen \mathcal{X}' mit der Matrix \mathbf{A}_0 nach Gl. (4.106) gezeigt, wobei Unsicherheiten in Form der Matrizen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.120)$$

$p_1 \in [-1, 1]$ vorliegen. Die Matrix \mathbf{A}_1 weist eine Rabgabfall um eins auf. Dies gilt auch für die Transponierte, wobei sich der Kern

$$\text{kern}(\mathbf{A}_1^T) = \{(0.4472, -0.8944, 0)\} = \mathbf{m}^T \quad (4.121)$$

ergibt. Im Beispiel wurden Einschließungen b der Vorgängerpolytope \mathcal{X}' in den Richtungen $\pm \mathbf{m}^T \mathbf{A}_0$ berechnet und in Abb. 4.16 als Ebenen dargestellt. Die Bildpolytope wurden für verschiedene p_1 berechnet und werden

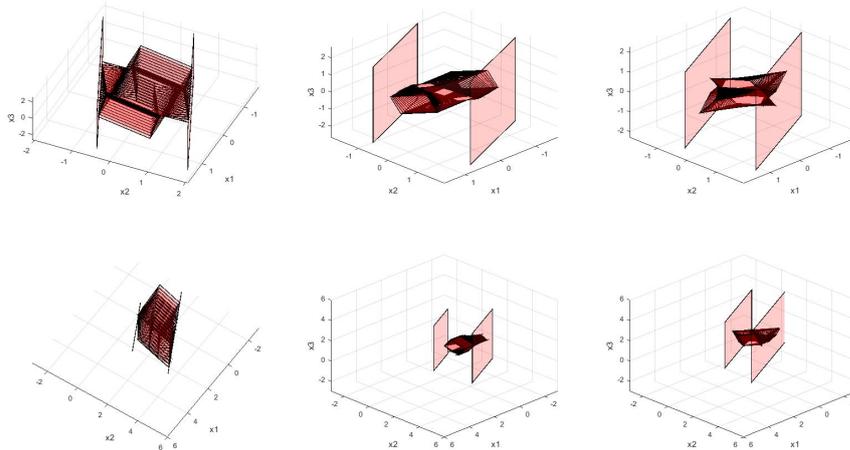


Bild 4.17: Bildpolytope und Einschließung in Richtung $\pm \mathbf{m}^T$

in Abb. 4.17 dargestellt. Die Ebenen $\pm \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{x} = b$ grenzen in allen Fällen direkt an die Bildmenge, wobei die Werte b schon aus der Einschließung der Vorgängermenge bekannt waren. \square

4.4. Berechnung von Ausgangs- und Zustandsintervallen

Häufig ist es von Interesse, bei der Prädiktion den Wertebereich bestimmter Zustands- oder Ausgangsgrößen über der Zeit zu berechnen und zu visualisieren. Beide Aufgaben können als Berechnung einer Einschließung des zum Zeitpunkt k gegebenen Zustandspolytops in festgelegten Richtungen aufgefasst werden. Damit ist die Aufgabe mit der Überapproximation eines Polytops hoher Dimension durch ein Polytop geringerer Dimension M_p identisch.

Die Überapproximation eines durch Prädiktion ermittelten Polytops ist nach Abschnitt 4.2.2 (Gl. (4.35)) möglich, womit man das neue Polytop $\mathcal{X}_{\text{oa}}(k) \supseteq \mathcal{X}_p(k)$

$$\mathcal{X}_{\text{oa}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{N}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \quad (4.122)$$

erhält, welches nicht für die weitere Prädiktion verwendet wird. Ist die Ausgangsmatrix des Systems (ohne Durchgriff) durch die Zeilen

$$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_n^T)^T \quad (4.123)$$

gegeben, dann berechnet sich das Ausgangsintervall für die Größe y_i durch Überapproximation des Zustandspolytops in den Richtungen

$$\pm \mathbf{n}_i^T = \pm \mathbf{c}_i^T. \quad (4.124)$$

Interessiert man sich für die Berechnung von Zustandsintervallen, so ist $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ zu wählen. Es ist zu bemerken, dass hiermit berechnete Intervalle möglicher Werte für die Elemente des Vektors \mathbf{y} oder \mathbf{x} im Allgemeinen nicht in beliebiger Kombination konsistent zum Modell sind. Der Zusammenhang zwischen mehreren Ausgangs- oder Zustandsgrößen geht bei der Überapproximation des Zustandspolytops verloren.

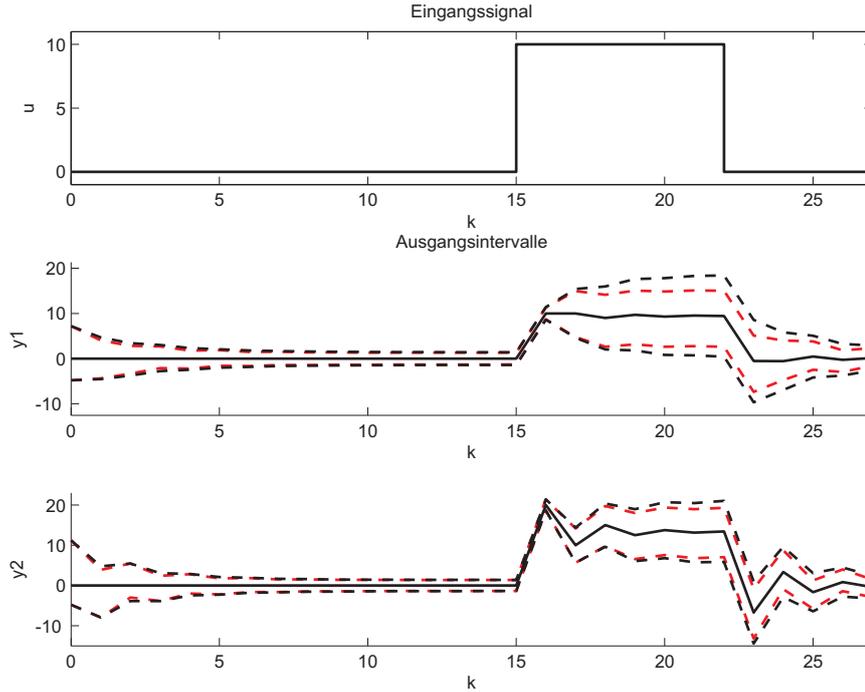


Bild 4.18: Intervalle für den Systemzustand bei \mathbf{N} -minimaler Prädiktion und Überapproximation

Beispiel 4.12: Ausgangsintervalle für die Prädiktion eines ungenau bekannten Systems.

In diesem Beispiel wird rekursiv die Zustandsmenge des Systems mit Zustandsübergangsmatrix

$$\mathbf{A}_S(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + p_1 \mathbf{A}_1 + p_2 \mathbf{A}_2 \quad (4.125)$$

$$= \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

$$\text{mit } p_1, p_2 \in [-1, 1], \quad (4.127)$$

und

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.128)$$

prädiziert und die durch Überapproximation ermittelten Intervalle für die Zustandsgrößen in Abb. 4.18 dargestellt. Das Eingangssignal $u_m(k)$ wird in Abb. 4.18 (oben) gezeigt. Es kann als gemessenes Signal interpretiert werden, wobei eine Genauigkeit von

$$u^*(k) \in [u_m(k) - 0.25, u_m(k) + 0.25] \quad (4.129)$$

angenommen wird. Das Systemverhalten für $u_m(k)$ und die nominelle Matrix \mathbf{A}_0 wird von den gestrichelt dargestellten Intervallen eingeschlossen. Die in rot dargestellte Einschließung resultiert aus der \mathbf{N} -minimalen Prädiktion (durch Ermittlung der *Polytopen Beschreibung*), während die schwarze

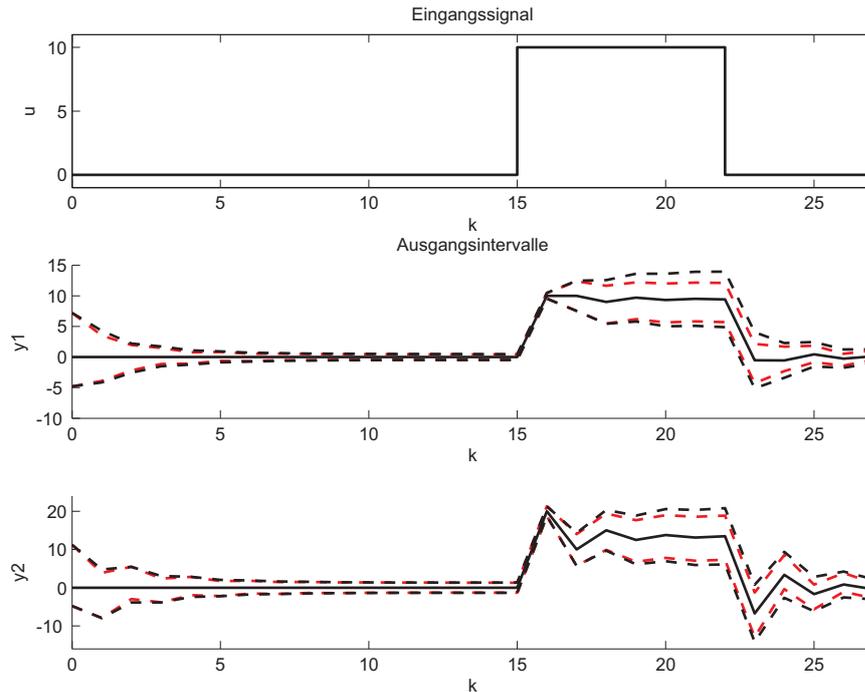


Bild 4.19: Intervalle für den Systemausgang bei verbesserter Prädiktion

Kurve aus der Überapproximation nach Gl. (4.61) für die gegebene *Strukturierte Beschreibung* folgt. Die Approximationsrichtungen wurden dabei durch Transformation des als Anfangszustandsmenge gegebenen Quaders mit der nominellen Matrix \mathbf{A}_0^{-1} gewählt. Die Ergebnisse können verglichen werden mit der verbesserten Prädiktion aus Abb. 4.19, die dadurch erreicht wird, dass in jedem Zeitschritt zusätzlich die orthogonalen Richtungen zum Eingangsvektor

$$\mathbf{n}_{M_p+\{1,2\}}^T = \pm(-2 \ 1)^T \quad (4.130)$$

berücksichtigt werden, also

$$\mathbf{N}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(k-1)\mathbf{A}_0^{-1} \\ \mathbf{n}_{M_p+\{1,2\}}^T \end{pmatrix}. \quad (4.131)$$

Man erhält verbesserte Einschließungen, wie Abb. 4.19 (rot) zeigt. Allerdings wächst die Komplexität der Polytope während der Simulation auf $M_p = 58$ an. Ein Unterschied zur Überapproximation (schwarz), ebenfalls mit den zusätzlichen Kanten (4.130) ist kaum zu erkennen. Die Dimension der Zustandpolytope ist aber mit $M_p = 58$ identisch. Für andere Ausgangsgrößen, gegeben durch

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.132)$$

und ein modifiziertes Eingangssignal erhält man ähnliche Ergebnisse. Entschieden man sich dazu, die Komplexität durch achsenparallele Überapproximation dann zu begrenzen, wenn $M_p = 10$ überschritten ist, so erhält man

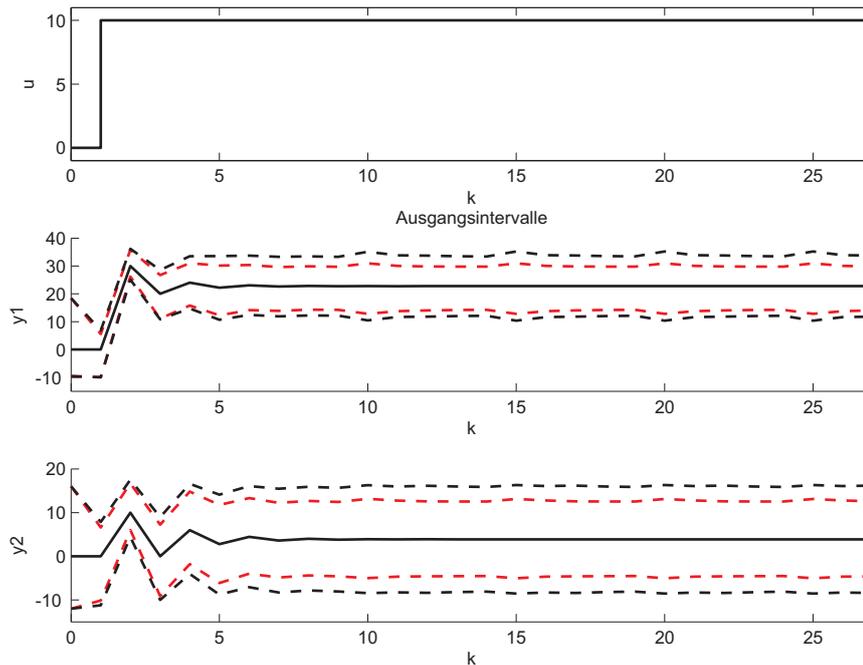


Bild 4.20: Intervalle für den Systemausgang bei Beschränkung von M_p

konservativere Einschließungen, wie Abb. 4.20 zeigt. Der wellige Verlauf des Ausgangsintervalls für $y_1(k)$ deutet an, dass ca. alle fünf Zeitschritte eine Überapproximation erfolgt. \square

4.5. Auswahl eindeutiger Zustandsschätzungen

In logischer Konsequenz des vorherigen Abschnitts (4.4) kann man aus den ermittelten Zustandsintervallen, einfach durch Bildung des Mittelwerts $mid[x_i]$, einen Zustand auswählen und als Ergebnis der Prädiktion (oder später der Beobachtung) betrachten. Der auf diese Weise ermittelte Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ muss allerdings nicht einmal in der Menge der möglichen Zustände \mathcal{X} enthalten sein.

Eine Alternative dazu stellt die Ermittlung des Chebyshev-Zentrums $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_c$ dar. Dabei handelt es sich um den Mittelpunkt der größten, in \mathcal{X} enthaltenen (Hyper-)Kugel. Da Lösungen dieses Problems mit linearen Programmen ermittelt werden können, wird der Ansatz in Anhang A ausführlich beschrieben. Von Nachteil ist, dass das Zentrum im Allgemeinen noch nicht eindeutig gegeben ist, sondern wieder Teil einer Menge sein kann. Ermittelt man im zweiten Schritt über elementweise Mittelwerte \mathbf{x}_c , so ist die Zugehörigkeit zu \mathcal{X} sichergestellt. Mit dem Ansatz ermittelt man eindeutig den inneren Radius r .

Der Begriff des Chebyshev-Zentrums wird in der Literatur nicht immer eindeutig verwendet. In [GK92] werden beide Ansätze, zur Ermittlung des inneren und des äußeren Radius, behandelt. Unter dem äußeren Radius wird der Radius der kleinsten Kugel

bezeichnet, welche das Polytop \mathcal{X} einschließt:

$$\min_{\mathbf{x}_c, r} \{ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \leq r, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \} \quad (4.133)$$

$$= \min_{\mathbf{x}_c} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \quad (4.134)$$

Auf andere, ebenfalls eindeutige Zentrumsdefinitionen finden sich Referenzen in [Bao09]. Alle diese Möglichkeiten erfordern ein wenig mehr Rechenaufwand, als die LP-Lösung aus Anhang A.

4.6. Zusammenfassung und Vergleich des Rechenaufwands

In Tab. 4.6 werden die verschiedenen vorgestellten Funktionen zur Prädiktion zusammengestellt und der Rechenaufwand verglichen, indem die Anzahl der zu lösenden linearen Programme angegeben wird sowie die Dimension des zugehörigen Vektorraums. Die Anzahl der Probleme hängt von der Dimension M_p des zu berechnenden Polytops ab, also von der Anzahl der Richtungen, in denen eine Einschließung berechnet werden soll. Der Aufwand für eine affine Transformation wird nicht weiter berücksichtigt. Außerdem wird nicht darauf eingegangen, wie der Aufwand von Projektionsalgorithmen oder die Auswertung der Minkowski-Summe im Vergleich beziffert werden kann.

Bei der Prädiktion in den Richtungen \mathbf{N} ist der Aufwand zwischen *Strukturierter* und *Polytope Beschreibung* der Parameterunsicherheiten zu vergleichen. Die Zahl der Eckpunkte eines Polytops bestimmt die Anzahl der Matrizen der *Polytope Beschreibung* und ist damit größer, als die Zahl der Parameter, die ein Zonotop in *Strukturierter Beschreibung* charakterisieren. Bei Umwandlung der *Strukturierte Beschreibungen* in die *Polytope Beschreibung* entstehen $N_{PB} = 2^{N_{SB}} \leq N_{SB}$ Parameter. Die Berücksichtigung unsicherer Eingangssignale führt, unabhängig von der Form der Beschreibung, entweder zu einer Erhöhung der Anzahl der zu lösenden linearen Programme, oder bewirkt eine Erhöhung der Dimension des Lösungsraumes.

Haben die Parameterunsicherheiten und die Unsicherheiten in den Eingangssignalen nur eine geringe Wirkung, so bietet es sich an, die Richtungen mit Hilfe der nominellen Matrix \mathbf{A}_0 nach

$$\mathbf{N}(k) = \mathbf{M}(k-1)\mathbf{A}_0^{-1} \quad (4.135)$$

zu bestimmen. Bei dieser Wahl der Approximationsrichtungen bleibt die Dimension des Polytops bei der Prädiktion für autonome Systeme oder Systeme mit exakt bekanntem Eingangssignal konstant. Außerdem reduziert sich nach Gl. (4.58) damit die Zahl der zu lösenden LP-Probleme.

Die in [Pla06] angegebene Überapproximation für die *Strukturierte Beschreibung* ermöglicht zusätzlich die Reduktion des sonst exponentiell mit N_{PB} wachsenden Aufwands. Dabei ist noch zu beachten, dass dann, wenn eine Approximation in den Richtungen \mathbf{N} bekannt ist, die entsprechende Lösung in Richtung $-\mathbf{N}$ mit geringem Zusatzaufwand berechnet werden kann. Deshalb legt die Verwendung dieser Approximation nahe, zeitunabhängige Richtungen zu wählen, die das prädierte Polytop begrenzen. Der Rechenaufwand ist dann durch $1 \cdot M_p + 2 \cdot M_p N_p$ lineare Programme gegeben wenn in M_p beliebige Richtungen Approximiert wird. Der leicht erhöhte Aufwand von $2 \cdot M_p + 2 \cdot M_p N_p$ ergibt sich dann, wenn die Einschließung dann in den Richtungen $\pm \mathbf{N}$ erfolgt.

Die Wahl der Einschließungsrichtungen \mathbf{N} bleibt ein Entwurfsproblem, bei dem in Abhängigkeit des Anwendungsszenarios ein Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Genauigkeit des Prädiktionsverfahrens gefunden werden muss. Dabei sind die Werte der Eingangsunsicherheiten, Art und Ausprägung der Parameterunsicherheiten, sowie die Eigenschaften der Messung zu berücksichtigen. Die Möglichkeiten zur Wahl der Richtungen werden in Abschn. 5.2 zusammengefasst.

Tabelle 4.1: Vergleich des Rechenaufwands für die Prädiktion

System	Gleichungen	Methode	Zahl der LPs	Lösungsraum	Vorr.
Exakte Prädiktion					
\mathbf{A}	(4.17), (4.18)	(affine) Transformation	-	-	\mathbf{A}^{-1}
\mathbf{A}, \mathbf{B}	(4.21)	Transform. u. Minkowski-Summe	-	-	\mathbf{A}^{-1}
\mathbf{A}, \mathbf{B}	(4.24), (4.26)	Projektion	-	$n + m$	\mathbf{A}^{-1}
\mathbf{A}, \mathbf{B}	(4.31), (4.32)	Projektion	-	$2n + m$	-
N-minimale Approximation					
\mathbf{A}, \mathbf{B}	(4.40)	LPs	M_p, M_p	n, m	\mathbf{A}^{-1}
\mathbf{A}, \mathbf{B}	(4.24), (4.39)	LPs	M_p	$n + m$	\mathbf{A}^{-1}
\mathbf{A}, \mathbf{B}	(4.31), (4.39)	LPs	M_p	$2n + m$	-
$\mathbf{A}_S(\mathbf{p}), \mathbf{B}_S(\mathbf{p})$	(4.78)	$\hookrightarrow \mathbf{A}_P(\mathbf{p}), \mathbf{B}_P(\mathbf{p}), N_{PB} = 2^{N_{SB}}, \text{LPs}$	$M_p \cdot N_{PB}, M_p \cdot N_{PB}$	n, m	-
$[\mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S](\mathbf{p})$	(4.71)	$\hookrightarrow [\mathbf{A}_P, \mathbf{B}_P](\mathbf{p}), N_{PB} = 2^{N_{SB}}, \text{LPs}$	$M_p \cdot N_{PB}$	$n + m$	-
$\mathbf{A}_P(\mathbf{p}), \mathbf{B}_P(\mathbf{p})$	(4.78)	LPs	$M_p \cdot N_{PB}, M_p \cdot N_{PB}$	n, m	-
$[\mathbf{A}_P, \mathbf{B}_P](\mathbf{p})$	(4.71)	LPs	$M_p \cdot N_{PB}$	$n + m$	-
$[\mathbf{A}_P, \mathbf{B}_P](\mathbf{p})$	(4.79), (4.80)	LPs	$M_p \cdot N_{PB}$	$2n + m$	-
$\mathbf{A}_P(\mathbf{p}), \mathbf{B}_P(\mathbf{p})$	(4.82)	LPs	$M_p \cdot N_{PB}$	$n + m$	$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p})$
Approximation					
$\mathbf{A}_S(\mathbf{p}), \mathbf{B}_S(\mathbf{p})$	(4.60),(4.56)	LPs	$M_p(1 + 2 \cdot N_{SB}), M_p(1 + 2 \cdot N_{SB})$	n, m	-
$\mathbf{A}_S(\mathbf{p}), \mathbf{B}_S(\mathbf{p})$	(4.60),(4.56),(4.57)	LPs, $\pm N$	$M_p/2(2 + 2 \cdot N_{SB}), M_p/2(2 + 2 \cdot N_{SB})$	n, m	-
$[\mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S](\mathbf{p})$	(4.64)	LPs	$M_p(1 + 2 \cdot N_{SB})$	$n + m$	-
$[\mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S](\mathbf{p})$	(4.64)	LPs, $\pm N$	$M_p/2(+2 \cdot N_{SB})$	$n + m$	-

Wie schon bei der Prädiktion ist aufgrund der Annahme unsicherer, beschränkter Parameter, welche sich aber über der Zeit verändern dürfen, sowie zeitvariabler Messfehler eine rekursive Darstellung der exakten, beobachteten Zustandsmenge mit gewissen Einschränkungen möglich, die hier als Definition angegeben wird:

Definition 9 (*Exakt beobachtete Zustandsmenge*)

*Exakt beobachtete Zustandsmengen für Modelle $\mathcal{M}(\mathbf{s}) = \{\{\mathbf{A}(\mathbf{s}_1), \mathbf{B}(\mathbf{s}_1), \mathbf{C}(\mathbf{s}_2)\}, * \dots\}$ mit Eingangs- und Messunsicherheiten sind gegeben durch*

$$\mathcal{X}^*(0) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \mid \exists \mathbf{s}_2 \in \mathcal{S}_2 \text{ s.d. } \mathbf{C}(\mathbf{s}_2)\mathbf{x} \in \mathcal{Y}(0)\} \quad (5.3)$$

$$\mathcal{X}^*(k_b) := \{\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{s}_1)\mathbf{x}' + \mathbf{B}(\mathbf{s}_1)\mathbf{u} \quad (5.4)$$

$$\mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}^*(k_b - 1), \mathbf{u} \in \mathcal{U}(k_b - 1), \mathbf{s}_1 \in \mathcal{S}_1, \exists \mathbf{s}_2 \in \mathcal{S}_2 \text{ s.d. } \mathbf{C}(\mathbf{s}_2)\mathbf{x} \in \mathcal{Y}(k_b)\} \quad (5.5)$$

für $k_b > 0$.

Zu bemerken ist, dass in der Darstellung nach Definition 5.3 unabhängige unsichere Parameter \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_2 verwendet werden. Dies ist deshalb erforderlich, da die Auswertung von Zustandsübergangs- und Ausgangsgleichung zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgt, womit nur die Unabhängigkeit konsistentes Verhalten über aufeinanderfolgende Rekursionsschritte sicherstellt. Zur Verdeutlichung sei bemerkt:

- In Gl. (5.4) wären zeitvariable Einschließungen der unsicheren Parameter mit $\mathbf{s}_1 \in \mathcal{S}_1(k_b - 1)$ und $\mathbf{s}_2 \in \mathcal{S}(k_b)$ zu ergänzen.
- Daraus wird deutlich, dass abhängige Parameter $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}](\mathbf{s})$ Gl. (5.4) mehrfach, zu verschiedenen Zeitpunkten ($k - 1$ und k) auftauchen würden. \mathbf{s} könnte unterschiedliche Werte zu einem Zeitpunkt annehmen.

Damit ist Definition 9 in dieser Form nur für unabhängige \mathbf{s}_i sinnvoll.

Die Erweiterung auf Systeme mit Durchgriff scheint leicht möglich zu sein, bereitet aber aus dem selben Grund Schwierigkeiten, dass das Eingangssignal zu unterschiedlichen Zeitpunkten in Zustands- und Ausgangsgleichung auftaucht. In der Rekursion würde $\mathcal{U}(k)$ zum Zeitpunkt k zunächst in die Ausgangsgleichung und einen Zeitschritt später in die Zustandsübergangsgleichung eingehen. In Abschn. 5.3.2 wird gezeigt, dass zur Darstellung exakter Mengen eine erweitertes Zustands-/Eingangspolytop rekursiv ermittelt werden muss.

Wie man aus Gleichung (5.3) erkennt, erhält man die beobachtete Menge zum Zeitpunkt k , indem man die zuvor beobachtete Menge $\mathcal{X}^*(k - 1)$ für einen Schritt in die Zukunft prädiziert, wie ein Vergleich mit Gl. (4.6) zeigt, und zusätzlich die Konsistenz mit der aktuellen Messung fordert. Die mit der Messung $\mathcal{Y}(k)$ konsistente Zustandsmenge ist durch

$$\mathcal{X}_m^*(k) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{s}_2 \in \mathcal{S}_2 \text{ s.d. } \mathbf{C}(\mathbf{s}_2)\mathbf{x} \in \mathcal{Y}(k)\} \quad (5.6)$$

gegeben. Die Beobachtung kann dann durch die Bildung der Schnittmenge aus prädizierter und gemessener Zustandsmenge nach

$$\mathcal{X}^*(k) = \mathcal{X}_p^*(k \mid k - 1) \cap \mathcal{X}_m^*(k) \quad (5.7)$$

berechnet werden, wobei die Prädiktion auf der Basis der zuvor beobachteten Menge $\mathcal{X}^*(k-1)$ erfolgt.

Werden ungenau bekannte Parameter berücksichtigt, dann gilt auch für die Beobachtung, dass die Berechnung exakter Zustandsmengen aufwendig ist und deshalb die Berechnung von Überapproximationen

$$\mathcal{X}(k) \supseteq \mathcal{X}^*(k) \quad (5.8)$$

angestrebt wird.

5.2. Algorithmus der schrittweisen Beobachtung

Der Algorithmus zur Zustandsmengenbeobachtung besteht im wesentlichen aus den zwei Schritten Prädiktion und Korrektur durch Messung. Hinzu kommt ein Steuerungsschritt, welcher eine Überapproximation der Zustandsmenge erlaubt, bzw. entscheidet, ob diese durchzuführen ist. In Abhängigkeit von den verwendeten Algorithmen kann hier auch durch Normierung des Polytops sichergestellt werden, dass dieses im Verlauf gut konditioniert bleibt und so keine numerischen Probleme auftreten.

1. **Prädiktion.** Die Prädiktion wurde in Kapitel 4 bereits ausführlich behandelt. Dabei wird anhand der Zustandsübergangsgleichung des Modells der Zustand für einen Zeitschritt prädiziert. Die ausführliche Diskussion des Einflusses unsicherer Parameter, welche auf im Allgemeinen nicht-konvexe Zustandsmengen führt, gibt auch Hinweise darauf, wie die Überapproximation realisiert werden kann.
2. **Korrektur durch Ausgangsmessung.** Die Schnittbildung (5.7) kann als Korrektur der zuvor prädizierten Zustandsmenge durch die aktuelle Messinformation $\mathcal{Y}(k)$ aufgefasst werden. Bei der Implementierung des Algorithmus 1 durch Polytope liegt das Messpolyeder (5.6) in der Form

$$\mathcal{X}_m(k) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}_m \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_m\} \quad (5.9)$$

vor. Die Korrektur erfolgt letztlich durch Bildung der Schnittmenge

$$\mathcal{X}(k) = \mathcal{X}_p(k) \cap \mathcal{X}_m(k) \quad (5.10)$$

durch Zusammenfassen der Ungleichungssysteme und Entfernen redundanter Ungleichungen (siehe Gl. (A.27)).

Messpolyeder. Ist die Matrix \mathbf{C} exakt bekannt und das System (2.3) hat keinen Durchgriff, dann sind die aktuellen Messinformationen durch (2.22) im Ausgangssignalraum gegeben. Setzt man hier $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ ein erhält man als Bedingung im Zustandsraum das Messpolyeder (5.9) mit

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{M}_y \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_m(k) = \mathbf{b}_y(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_m(k) + \Delta \underline{\mathbf{y}} \\ -\mathbf{y}_m(k) + \Delta \underline{\mathbf{y}} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Für Systeme mit Durchgriff kann als Ansatz für schrittweise Beobachtung von der umgestellten Ausgabeleichung $\mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$ ausgegangen werden was mengentheoretisch auf

$$\mathbf{C}\mathcal{X}_m = \mathcal{Y} \oplus \underbrace{(-\mathbf{D}\mathbf{U})}_{=\mathcal{Z}} \quad (5.12)$$

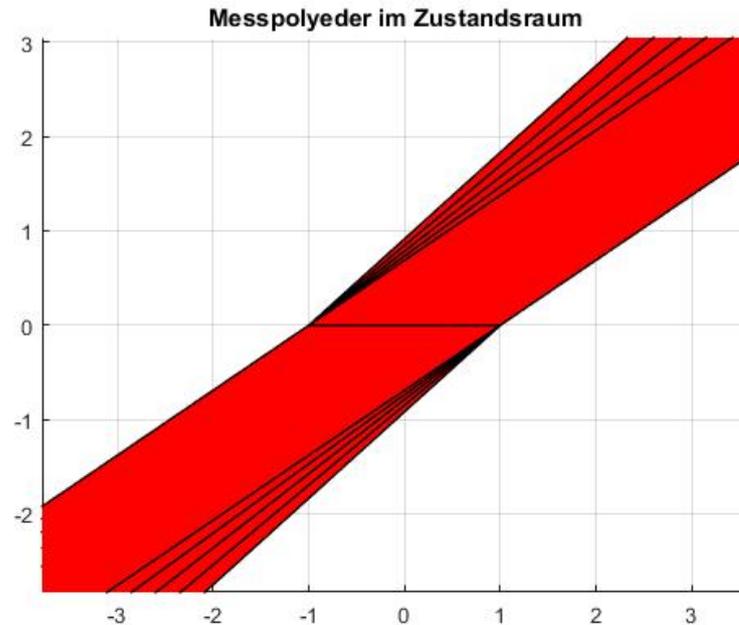


Bild 5.2: Beispiel für nicht-konvexe, unbeschränkte Zustandsmenge durch Messung und unsicheren Parameter

führt. Man bildet also zuerst das Eingangspolytop (2.20) ab mit $-\mathbf{D}$ ab und erhält \mathcal{Z} . Daraus ergibt sich \mathcal{X}_m nach:

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q \mid \mathbf{M}_z \mathbf{z} \leq \mathbf{b}_z\} \Rightarrow \mathcal{X}_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}_z \mathbf{C} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_z\} \quad (5.13)$$

Die Mengen \mathcal{X}_m sind im Allgemeinen nicht beschränkt, da selten Messungen für alle Zustandsgrößen vorliegen. Treten Unsicherheiten in der Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{p})$ auf, führt das auf Probleme, da die Mengen nicht konvex sein müssen, wie Abb. 5.2 zeigt. Es stellt sich die Frage, ob die Unsicherheit nicht sinnvollerweise als Messfehler modelliert werden kann. Alternativ ist ein anderer Weg zur Festlegung einer konvexen polyedrischen Überapproximation in Abhängigkeit vom Messwert zu finden.

3. **Steuerungsschritt.** Die wesentliche Aufgabe des Steuerungsschritts bei Implementierung der schrittweisen Beobachtung nach Algorithmus 1 durch Polytope im Zustandsraum ist es, die Approximationsrichtungen $\mathbf{N}(k)$ festzulegen, bzw. eine Überapproximation durchzuführen. Dabei kann prinzipiell die Prädiktionsmethode in Abhängigkeit von der Systembeschreibung ausgewählt werden. Ziel ist es, dass die Zahl der Einschließungsrichtungen der Polytope klein genug bleibt, so dass die Echtzeitfähigkeit des Algorithmus nicht gefährdet ist.

Der Steuerungsschritt soll sicherstellen, dass die Dimension M_p des Zustandspolytops beschränkt bleibt. Überschreitet die Zahl der Ungleichungsbedingungen M_p eine Schranke, so kann beispielsweise eine Überapproximation durch die Wahl $\mathbf{N}(k) = \mathbf{N}_{oa}$ ausgelöst werden.

Eine andere Möglichkeit ist durch die Wahl von zeitinvarianten Einschließungsrichtungen \mathbf{N} gegeben. Hängt die Wahl der Einschließungsrichtungen vom Vorgängerpolytop $\mathbf{M}(k-1)$ ab, so kann die Komplexität möglicherweise in jedem

Zeitschritt wachsen, weshalb eine Überapproximation erforderlich wird. Durch feste Richtungen wird dieses Problem vermieden.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Implementierung, der schon bei der Prädiktion in Kapitel 4 eine Rolle spielt, ist die Konditionierung des Ungleichungssystems. Werden die Approximationsrichtungen für die Prädiktion in jedem Zeitschritt durch $\mathbf{N}(k) = \mathbf{M}(k-1)\mathbf{A}^{-1}$ bestimmt, so muss in der Regel eine Normierung des Ungleichungssystems nach Gleichung (A.6) durchgeführt werden. Dies gilt z.B. bei Anwendung der Fourier-Motzkin Eliminierung. Je nach Algorithmus ist auch die Entfernung redundanter Ungleichungen in einem zusätzlichen Schritt erforderlich.

Algorithmus 1 Schrittweise Zustandsmengenbeobachtung

Gegeben: - Modell $\mathcal{M}(\mathbf{p})$

- Eingangs/Ausgangsfolgen $\{\mathbf{u}(0 \dots k_b), \mathbf{y}(0 \dots k_b)\}$

- Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0

Initialisierung: $k = 0$; $\mathcal{X}_p(0) = \mathcal{X}_0$

Wiederhole für alle $k \leq k_b$

Eingangsmengen: $\mathcal{U}(k), \mathcal{Y}(k)$

Korrektur: $\mathcal{X}(k) = \mathcal{X}_p(k | k-1) \cap \mathcal{X}_m(k)$

Steuerungsschritt: - Normierung der Darstellung von $\mathcal{X}(k)$

- Wahl des Prädiktionsverfahrens; Festlegung von \mathbf{N}

- evtl. Überapproximation in Abhängigkeit von M_p

Prädiktion: $\mathcal{X}_p(k+1 | k)$ berechnen und speichern

$k++$;

Ende Wiederhole

Ergebnis: Zustandsmengen $\mathcal{X}(0 \dots k_b)$

In diesem Algorithmus können beliebige Prädiktionsverfahren eingesetzt werden, welche eine garantierte polytope Einschließung liefern (siehe Kap. 4). Die Festlegung der Approximationsrichtungen \mathbf{N} ist der wesentliche Freiheitsgrad bei der Zustandsmengenbeobachtung und wird in Abschn. 5.8 nochmal diskutiert. Die Berechnung der Schnittmenge umfasst in der Regel die Entfernung redundanter Ungleichungen, es sei denn, sie ist durch die folgende Überapproximation obsolet.

Beispiel 5.1: Zustandsmengenbeobachtung für ein System zweiter Ordnung.

Abb. 5.3 zeigt die Folge der ersten neun beobachteten Zustandsmengen für das System

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -2.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

wobei von einer Eingangsunsicherheit von $\Delta u = 0.25$ ausgegangen wird. Gemessen wird ein skalarer Ausgang $\mathbf{c}_m^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit einer angenommenen Messunsicherheit von $\Delta y = 0.8$. Die blauen Polytope stellen die prädizierten Zustandsmengen dar, während in rot die Schnittmengen nach der Messung zum jeweiligen Zeitpunkt k gezeigt werden. In Abb. 5.4 (oben) wird

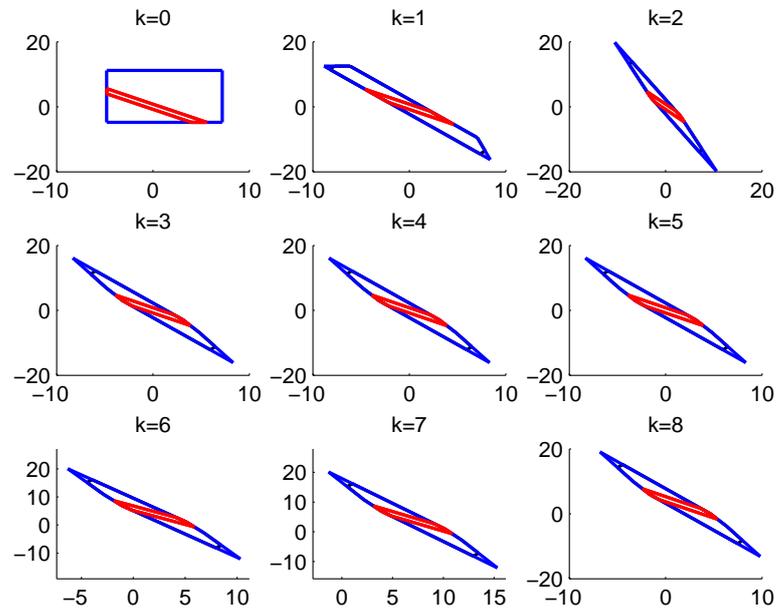


Bild 5.3: Zustandsmengenbeobachtung für ein instabiles System zweiter Ordnung (\mathbf{A})

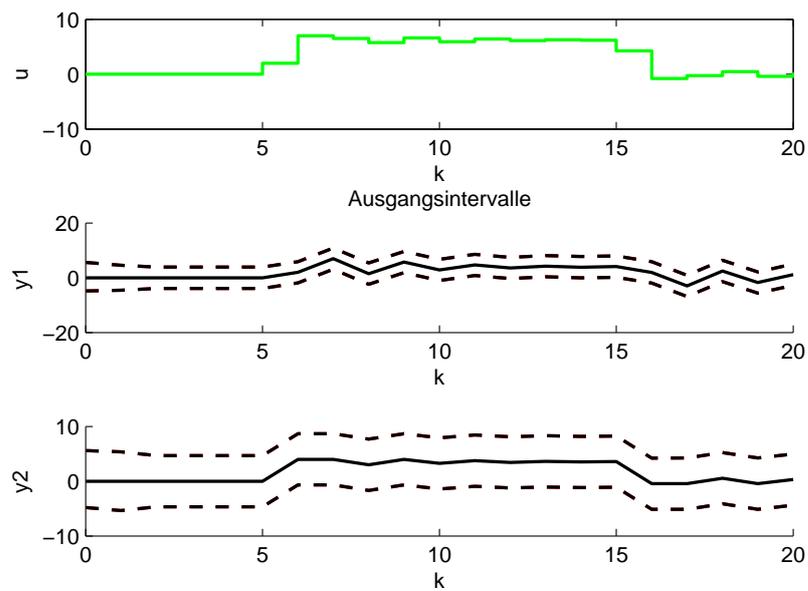


Bild 5.4: Zustandsintervalle für ein instabiles System (\mathbf{A}) zweiter Ordnung

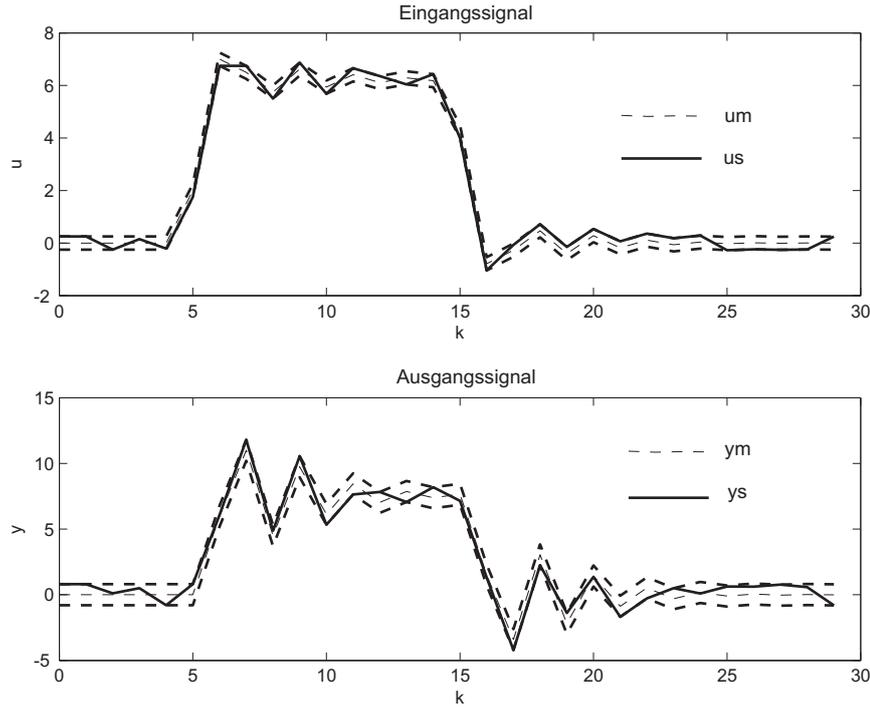


Bild 5.5: Ein- und Ausgangsintervalle für ein instabiles System (\mathbf{A}) zweiter Ordnung

zunächst das Eingangssignal $u(k)$ gezeigt. Wenn man sich für die Einschließung der Zustandsgrößen interessiert, geht man von einer Ausgangsmatrix

$$\mathbf{C}_{disp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

aus und berechnet damit achsenparallele Überapproximationen der Zustandspolytope. Die gestrichelt dargestellten Intervalle schließen den Verlauf des Zustands des nominellen Systems zu jeder Zeit ein. Die wahren Werte liegen sogar immer in der Mitte des Intervalls, wenn für das nominelle System keine Messfehler auftreten. In Abb. 5.6 sind die Beobachtungsergebnisse gezeigt, wobei der Beobachter mit fehlerbehafteten Messsignalen beaufschlagt wird, siehe Abb. 5.5, die aber die Annahmen $|u_m - u^*| < \Delta u$ und $|y_m - y^*| < \Delta y$ erfüllen.

Jetzt wird die Beobachtung für ein System mit der modifizierten Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = 0.2\mathbf{A}$ durchgeführt. Für dieses System erhält man deutlich bessere Zustandseinschließung bei exakter Prädiktion als bei der \mathbf{N} -minimalen Überapproximation in den Richtungen $\mathbf{N}(k) = \mathbf{M}(k-1)\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$. Dies zeigt sich anhand der verschiedenen Schnittmengen, die in Abb. 5.7 in rot dargestellt sind.

Deutlicher wird die unterschiedliche Qualität der Einschließung in Abb. 5.8, wobei in schwarz die exakte Approximation dargestellt ist. Die Berechnung erfordert einen höheren Rechenaufwand als die in rot dargestellte \mathbf{N} -minimale Einschließung. Abb. 5.9 zeigt den Verlauf der Zeilenzahl M_p von \mathbf{M} , also der Kantenzahl der Polytope nach der Prädiktion. Sie ist in diesem Beispiel über der Zeit für $k > 5$ konstant und variiert nur zu Beginn

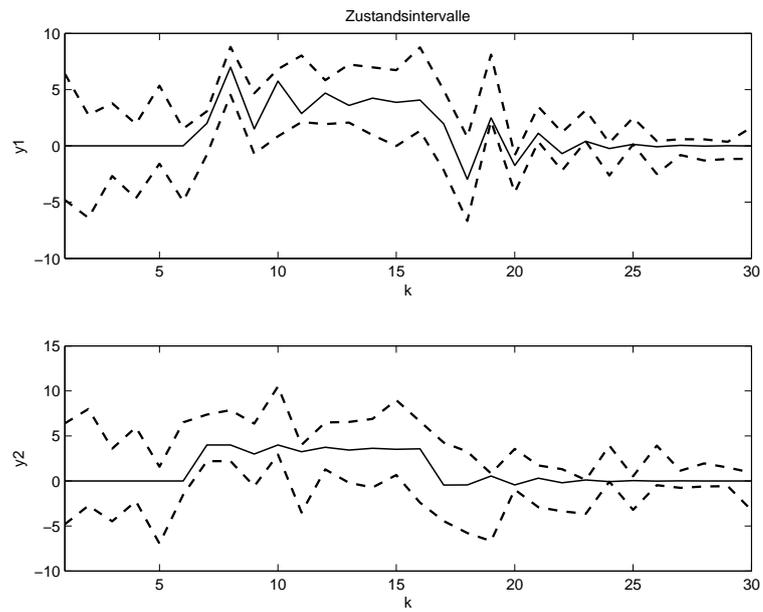


Bild 5.6: Zustandsmengenbeobachtung für ein instabiles System (\mathbf{A}) zweiter Ordnung mit Messfehlern

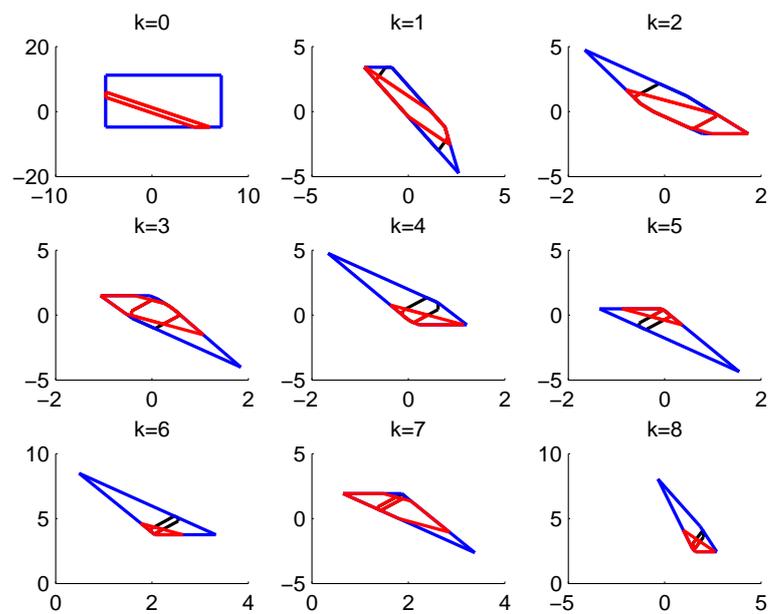


Bild 5.7: Zustandsmengenbeobachtung für ein stabiles System ($\tilde{\mathbf{A}}$) zweiter Ordnung

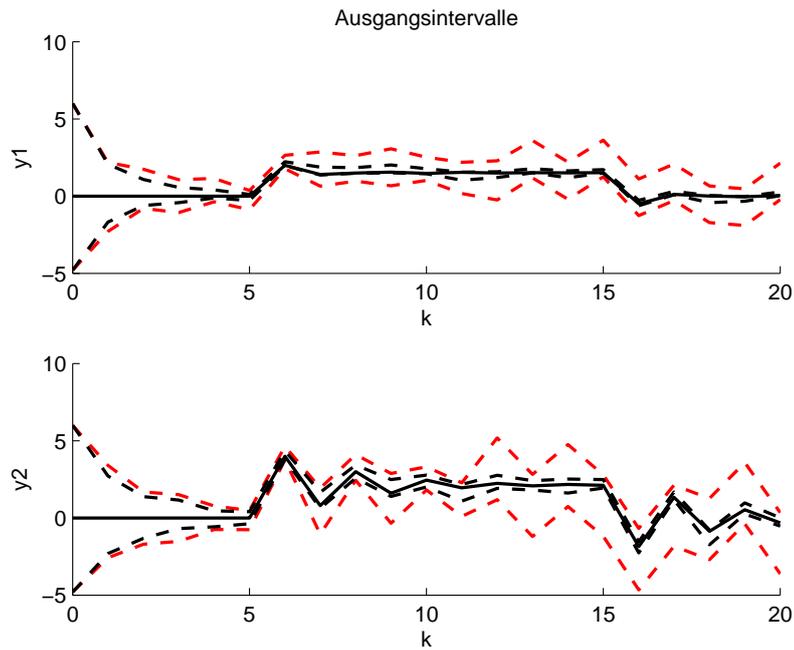


Bild 5.8: Zustandsmengenbeobachtung für ein stabiles System ($\tilde{\mathbf{A}}$) zweiter Ordnung

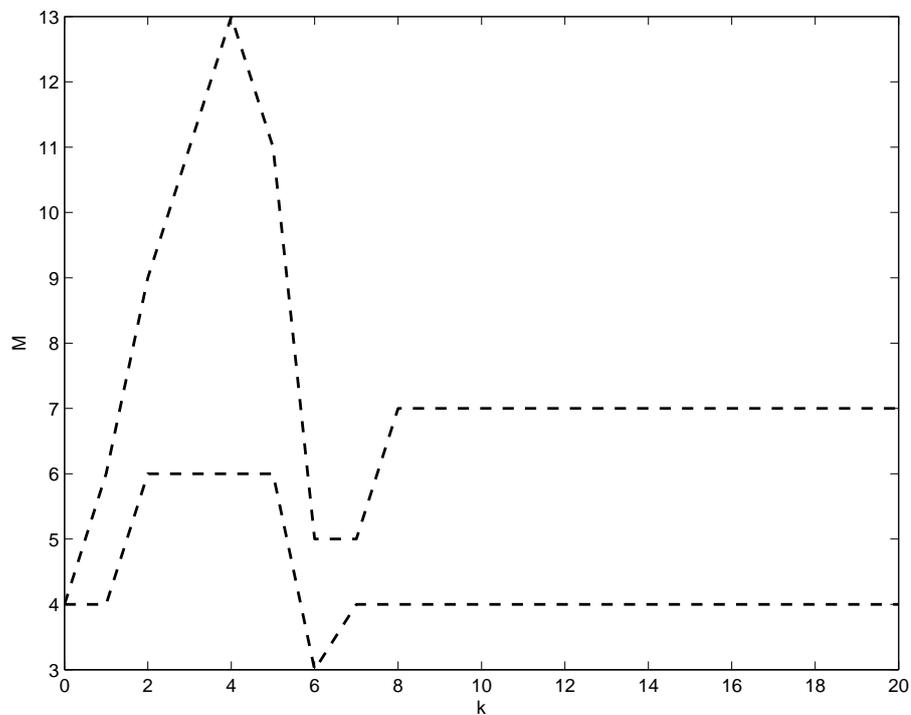


Bild 5.9: Komplexität der prädizierten Zustandspolytope \mathcal{X}_p

aufgrund der Wahl des Anfangspolytops \mathcal{X}_0 . Nach Bildung der Schnittmenge wird das Zustandspolytop in beiden Fällen durch vier Kanten beschrieben. Bei der exakten Prädiktion erhöht sich die Kantenzahl aufgrund des Eingangssignals. \square

5.3. Beobachtung für LDTI-Systeme

Für LDTI-Systeme ist prinzipiell eine exakte, konvexe Beobachtung möglich, das heißt, dass die minimale garantierte Einschließungsmenge nach Definition 9 konvex ist und ermittelt werden kann. Ob dies auch zweckmäßig ist, hängt von der Komplexität der Beschreibung dieser Menge ab. Ist diese zu hoch, so empfiehlt es sich eine Überapproximation gezielt durchzuführen.

1. **Schrittweise Beobachtung.** Die Beobachtung für LDTI-Systeme kann mit dem Algorithmus 1 durchgeführt werden, wobei die verschiedenen Möglichkeiten zur Ermittlung der Prädiktion in Abschn. 4.2 beschrieben wurden. Eine exakte Beobachtung ist mit diesem Algorithmus nur für Systeme ohne Durchgriff möglich. Ob die Prädiktion mit der Minkowski-Summe oder durch Projektion durchgeführt wird, spielt dabei keine Rolle. Erst bei Verwendung einer Überapproximation im Zustandsraum oder im erweiterten Zustands-/Eingangsraum geht die Eigenschaft der Exaktheit verloren.

Von Vorteil ist, dass die schrittweise Beobachtung prinzipiell eine parallele Abarbeitung von Prädiktion und Korrektur ermöglicht. In dem Moment, wo der aktuelle Messwert zur Verfügung steht muss nur noch die Schnittmenge für eventuelle Ausgaben berechnet werden, wenn die Prädiktion bereits vorliegt. Parallel dazu kann die Prädiktion für den nächsten Zeitschritt erfolgen.

2. **Kompakte Beobachtung.** Für Systeme mit Durchgriff zeigt sich im Folgenden, dass durch eine kompakte Darstellung im erweiterten Zustands-/Eingangsraum (und einer neuen Formulierung des Algorithmus) ebenfalls eine exakte Beobachtung durchgeführt werden kann. Die hier entwickelte kompakte Darstellung bietet außerdem den Vorteil, dass nur eine Überapproximation pro Beobachtungsschritt für jede Einschließungsrichtung erforderlich ist. Damit ist das Verfahren bezüglich des Rechenaufwands effizient und verlässlich. Die Parallelisierbarkeit der Schritte geht dafür verloren.

Weitere Vorteile einer kompakten Darstellung betreffen Formulierungsmöglichkeiten für unsichere Parameter, oder das Interesse an einer E/A-Einschließungen oder verzögerten Beobachtung. Diese Aspekte werden später behandelt.

5.3.1. LDTI-Systeme ohne Durchgriff

Für das System (2.3) ist die minimale Zustandsmenge rekursiv nach Definition 9 wie folgt gegeben,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}^*(0) &:= \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_m(0) \cap \mathcal{X}_0\} \\
 \mathcal{X}^*(k) &:= \{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{X}_m(k) \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}^*(k-1), \mathbf{u} \in \mathcal{U}(k-1)\} \\
 &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_m(k) \mid \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{u}) \in \mathcal{X}^*(k-1), \mathbf{u} \in \mathcal{U}(k-1)\} \quad \forall k > 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

wobei zum Zeitpunkt $k = 0$ die Anfangszustandsmenge durch die erste Messung korrigiert wird. In Gl. (5.16) wird die Existenz der Inversen \mathbf{A}^{-1} vorausgesetzt. Die Forderungen (5.16) lassen sich durch polytope Darstellung im erweiterten Zustands-/Eingangsraum formulieren. Dies entspricht Gl. (4.24) für die Prädiktion, ergänzt um das Messpolytop (5.11),

$$\mathcal{P}(k) := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k-1) \end{pmatrix}^T \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}(k-1)\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{M}(k-1)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \\ \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b}(k-1) \\ \mathbf{b}_u(k-1) \\ \mathbf{b}_m(k) \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.17)$$

wobei die ersten beiden Zeilen des Ungleichungssystems die Prädiktion und die dritte Zeile die aktuelle Messung repräsentieren. Die Darstellung (5.17) sowie eine Erweiterung für nicht invertierbare Systemmatrizen finden sich in [ST99]. Die Darstellung entspricht dann einer Erweiterung von Gl. (4.31) um das Messpolytop mit $\mathbf{M}_m = \mathbf{M}_y\mathbf{C}$. In beiden Fällen erfolgt die Auswertung wie folgt:

Exakte Beobachtung. Die gesuchte Zustandsmenge erhält man durch die Projektion (4.26) des Polytops $\mathcal{P}(k)$ in den Zustandsraum:

$$\mathcal{X}^*(k) = \text{Proj}_{\mathcal{X}} \mathcal{P}(k). \quad (5.18)$$

Überapproximation. Die Elemente des Vektors $\mathbf{b}(k)$ ergeben sich als Lösungen der linearen Programme

$$b_i(k) = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}(k)} (\tilde{\mathbf{n}}_i^T \cdot \mathbf{p}), \quad (5.19)$$

wobei die Zeilen $\tilde{\mathbf{n}}_i^T$ der Matrix $\tilde{\mathbf{N}} = (\mathbf{N} \mathbf{0}_{[M_p \times m]})$ die auf den Zustands/-Eingangsraum erweiterten Approximationsrichtungen darstellen (vgl. (4.39)).

Algorithmus 2 Kompakte Zustandsmengenbeobachtung (ohne Durchgriff)

Gegeben:

- Modell $\mathcal{M}(\mathbf{p})$
- Messwertfolgen $\{\mathbf{u}(0 \dots k_b), \mathbf{y}(0 \dots k_b)\}$, (1.3), (1.4)
- Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0
- (- Approximationsrichtungen \mathbf{N})

Initialisierung:

$$\mathcal{X}(0) = \mathcal{X}_m(0) \cap \mathcal{X}_0, \quad k = 1$$

Wiederhole für alle $k \leq k_b$

1. Bildung des Polytops (5.17) mit $\mathcal{X}(k-1)$ und $\mathcal{X}_m(k)$
2. Berechnung und Speichern der Projektion (5.18)
(oder der Überapproximation (5.19))
3. $k = k + 1$

Ende Wiederhole

Ergebnis: Zustandsmenge $\mathcal{X}(k)$ für $k \in \{0, \dots, k_b\}$

Algorithmus 2 fasst die Vorgehensweise bei der kompakten Zustandsmengenbeobachtung zusammen, wobei Prädiktion, Korrektur und evtl. Überapproximation praktisch

in einem Schritt erfolgen. Da es sich nur um eine andere Darstellung der zuvor skizzierten, schrittweisen Zustandsmengenbeobachtung handelt, besitzt der Algorithmus 2 die Eigenschaft, garantierte Zustandseinschließungen zu ermitteln, d. h.

$$\mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}^*(k) \subseteq \mathcal{X}(k).$$

Bei Verwendung der Projektion ist die Beobachtung für LDTI-Systeme exakt. Weitere Eigenschaften wie die Beschränktheit der Zustandsmengen werden später in diesem Kapitel angesprochen. Zur Berechnung N -minimaler Zustandsmengen für Modelle mit unsicheren Parametern lässt sich die Vorgehensweise bei Verwendung der Überapproximation leicht erweitern.

5.3.2. LDTI-Systeme mit Durchgriff.

Die Erweiterung der Messgleichung wurde bereits mit Gl. (5.12) als möglicher Ansatz zur Berechnung garantierter Einschließung der Zustandsmenge mit Algorithmus 1 der schrittweisen Beobachtung vorgestellt. Allerdings wird für Systeme mit Durchgriff auch bei exakter Prädiktion keine exakte Einschließung berechnet, da die Mengenangabe über das Eingangssignal $\mathbf{u}(k)$ in mehreren Zeitschritten verwendet wird. Anschaulich ist klar, dass Informationen über $\mathbf{u}(k)$ durch Schnittbildung mit der prädierten Menge vorliegen können, aber im nächsten Zeitschritt nicht zur Prädiktion verwendet werden.

Um diesen Mangel zu beheben könnte man in Anlehnung an (5.17) das folgende Polytop formulieren:

$$\mathcal{P}(k) := \left\{ \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k-1) & \mathbf{u}^T(k) \end{pmatrix}^T \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}(k-1)\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{M}(k-1)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_u(k-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_y\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_y\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_u(k) \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b}(k-1) \\ \mathbf{b}_u(k-1) \\ \mathbf{b}_y(k) \\ \mathbf{b}_u(k) \end{pmatrix} \right\} \quad (5.20)$$

Die Projektion auf den Zustandsraum ist hier notwendig, um für den nächsten Zeitschritt die Elemente \mathbf{M} , \mathbf{b} zu ermitteln.

$$Proj_{\mathcal{X}}\mathcal{P}(k) \longrightarrow \mathbf{M}(k), \mathbf{b}(k) \quad (5.21)$$

$$Proj_{\mathcal{U}}\mathcal{P}(k) \longrightarrow \mathbf{M}_u(k-1), \mathbf{b}_u(k-1) \quad (5.22)$$

Die Projektion auf den Eingangsraum zeigt, dass unter gewissen Umständen hiermit schon Verbesserungen der Einschließung für $\mathbf{u}(k)$ gegenüber der a-priori-Kenntnis des Messfehlers erreicht werden können. Dies ist nur möglich, weil der Durchgriff eine direkte Wirkung des Eingangs auf den Ausgang bedeutet. Im nächsten Zeitschritt kann eine solche Verbesserung in $\mathbf{u}(k-1)$ in Zeile 2 der Gleichung (5.20) eingesetzt werden. Allerdings macht man sich leicht klar, dass eine eventuelle Abhängigkeit zwischen \mathbf{x} und \mathbf{u} bei dieser separaten Projektion in Zustands- und Eingangsraum verloren geht, weshalb auch hiermit keine exakte Einschließung berechnet wird.

Die exakte Einschließung erhält man, indem man die Abbildung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k-1) & \mathbf{u}(k-1) \end{pmatrix}^T \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) & \mathbf{u}(k-1) \end{pmatrix}^T \quad (5.23)$$

realisiert. Sie ist gegeben durch die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

welche dann invertierbar ist, wenn auch \mathbf{A}^{-1} existiert. Erweitert man den Zustandsvektor außerdem um die aktuelle Eingangsgröße, um die Wirkung des Durchgriffs zu erfassen, dann erhält man das Polytop

$$\mathcal{P}(k) := \left\{ \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k-1) & \mathbf{u}(k)^T \end{pmatrix}^T \mid \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}}(k-1)\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_y\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_y\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \leq \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}(k-1) \\ \mathbf{b}_y(k) \\ \mathbf{b}_u(k) \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.25)$$

Der rekursiv zu ermittelnde und zu speichernden Zustand ist

$$\mathcal{XU}(k) = \{(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))^T \mid \tilde{\mathbf{M}}(k) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{pmatrix} \leq \tilde{\mathbf{b}}(k)\}. \quad (5.26)$$

Man erhält ihn durch Projektion auf den Teilraum, der aus dem aktuellen Zustands- und Eingangsraum besteht:

$$\text{Proj}_{\mathcal{XU}}\mathcal{P}(k) \longrightarrow \tilde{\mathbf{M}}(k), \tilde{\mathbf{b}}(k) \quad (5.27)$$

Das entspricht der Projektion von (5.25) auf die ersten n und die letzten m Koordinaten.

Algorithmus 3 Zustandsmengenbeobachtung für Systeme mit Durchgriff

Gegeben:

- Modell $\mathcal{M}(\mathbf{p})$
- Messwertfolgen $\{\mathbf{u}(0 \dots k_b), \mathbf{y}(0 \dots k_b)\}$, (1.3), (1.4)
- Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0
- (- Approximationsrichtungen \mathbf{N})

Initialisierung:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(0) &= \mathcal{X}_m(0) \cap \mathcal{X}_0, \quad k = 1 \\ \mathcal{XU}(0) &= \mathcal{X}(0) \times \mathcal{U}(0) \text{ aus } \mathbf{u}(0) \end{aligned}$$

Wiederhole für alle $k \leq k_b$

1. Bildung des Polytops (5.17) mit $\mathcal{XU}(k-1)$ und $\mathcal{X}_m(k)$
2. Berechnung und Speichern der Projektion (5.18)
(oder der Überapproximation (5.19))
3. Berechnung der Ausgabe: Projektion (5.18)
(oder der Überapproximation (5.19))
4. $k = k + 1$

Ende Wiederhole

Ergebnis: Zustandsmenge $\mathcal{X}(k)$ für $k \in \{0, \dots, k_b\}$

Im Unterschied zu Algorithmus 2 ist der zu speichernde Zustand hier ein Polytop im \mathbb{R}^{n+m} . Dazu muss auch der Initialisierungsschritt angepasst werden. Schritt 3 kann eventuell durch Reduktion der Polytops $\mathcal{XU}(k)$ erfolgen, wenn dort entsprechende Einschließungsrichtungen berücksichtigt wurden.

Beispiel 5.2: Exakte Beobachtung für ein System mit Durchgriff

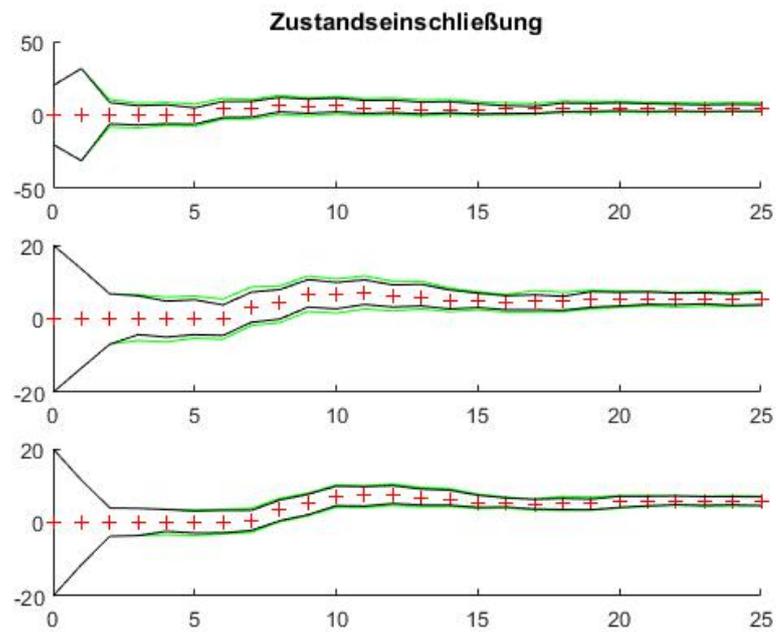


Bild 5.10: Zustandseinschließung für ein System dritter Ordnung mit Durchgriff.

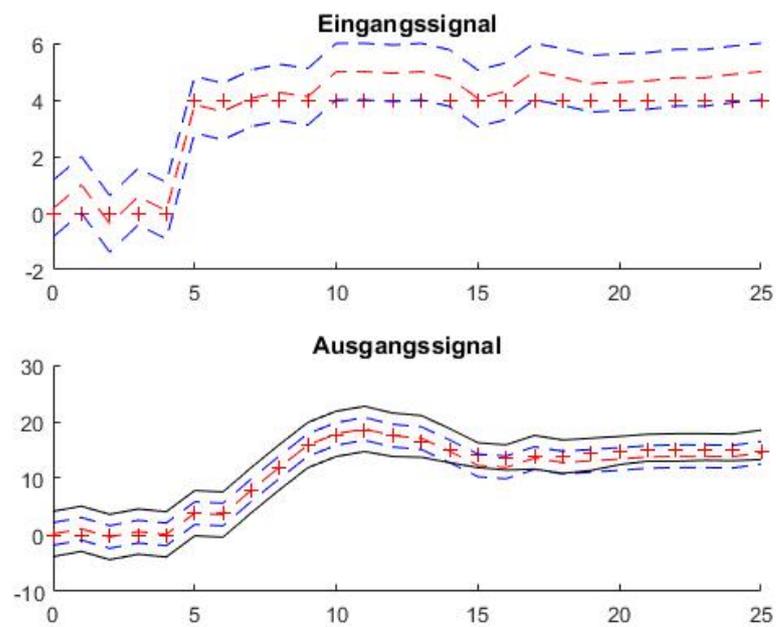


Bild 5.11: E-/A-Einschließung für ein System dritter Ordnung mit Durchgriff.

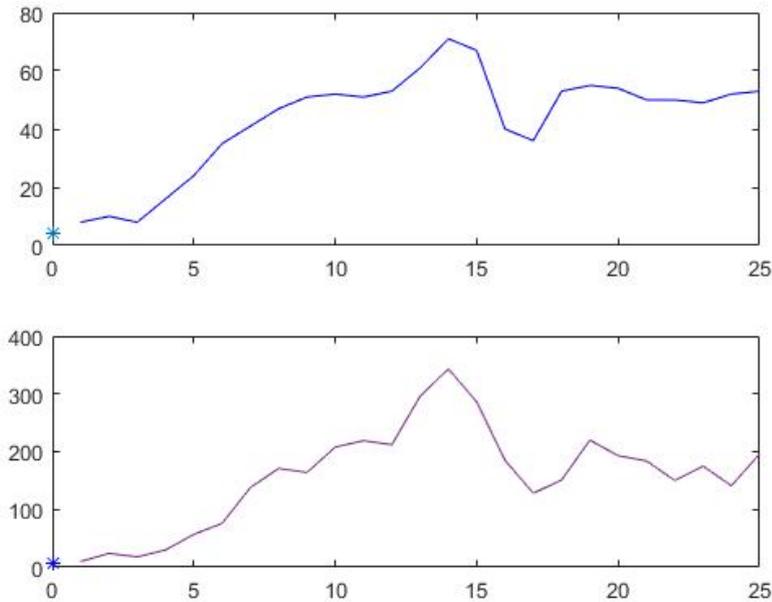


Bild 5.12: Komplexität der Zustands-/Eingangspolytope bei exakter Beobachtung mit Durchgriff

Betrachtet wird hier das System dritter Ordnung

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.8 & -0.8 \\ 0.8 & 0.16 & 0.16 \\ 0.16 & 0.8 & 0.16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (0 \quad 1 \quad 1) \quad (5.28)$$

und $\mathbf{D} = 4$. Abbildung 5.10 zeigt die exakte Zustandseinschließungen und im Vergleich ermittelte Überapproximation mit festen Richtungen. Das System wird mit dem in Abb. 5.11 dargestellten Eingangssignal angeregt (Kreuze, rot), wobei der Beobachter aufgrund von Messfehlern $|\Delta u| \leq 1$ die rote, gestrichelte Messung erhält. Das Ausgangssignal ist mit $|\Delta y| \leq 2$ messfehlerbehaftet. Die exakte Beobachtung erfolgt durch Formulierung des Polytops (5.25) im \mathbb{R}^5 . Die Projektion (5.27) ergibt hier Polytope im \mathbb{R}^4 mit inakzeptabel anwachsender Komplexität, was in Abb. 5.12 unten dargestellt wird. \square

Für die Verwendung einer Approximation in festen Richtungen spricht vor allem der konstante Rechenaufwand pro Zeitschritt. Numerische Probleme, die aus der Implementierung des Projektionsalgorithmus resultieren, können vermieden werden. Deshalb soll diese Vorgehensweise für alle praktischen Anwendungen vorgeschlagen werden, während exakte Beobachtung eher zur Systemanalyse und Beobachterentwurf sinnvoll eingesetzt werden kann.

Beispiel 5.3: Beobachtung von Systemen mit Durchgriff durch Überapproximation

Betrachtet wird hier das System dritter Ordnung

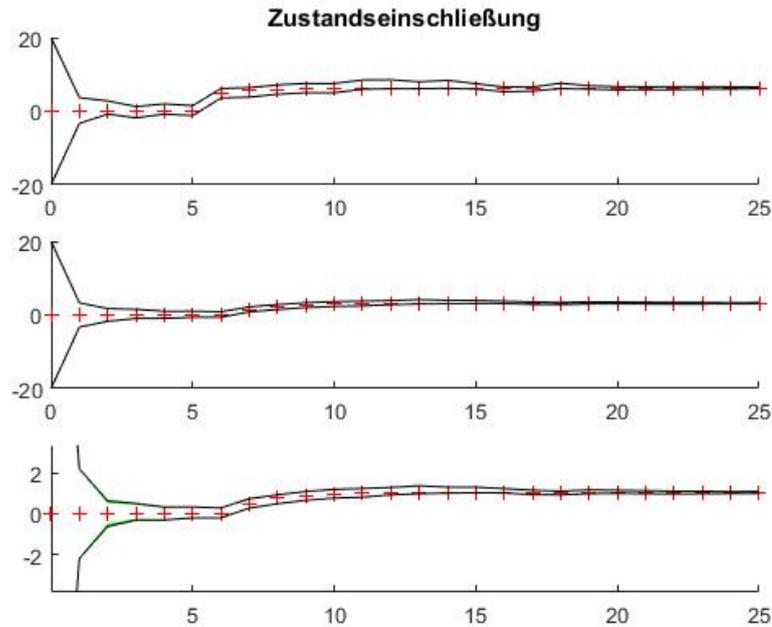


Bild 5.13: Zustandseinschließung für ein System dritter Ordnung mit Durchgriff.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.11 & 0.2 & 0.01 \\ 0.3 & 0.4 & 0.04 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (0 \quad 1 \quad 1) \quad (5.29)$$

und $\mathbf{D} = 1$. Die Matrix \mathbf{A} ist stark kontrahierend, so dass eine Überapproximation in Richtung der Basisvektoren des erweiterten Zustandsraumes/Eingangsraumes vollkommen ausreichend ist. Abbildung 5.13 zeigt diese Zustandseinschließungen (schwarz) welche durch Hinzunahme weitere Richtungen (grün) kaum verbessert werden kann, obwohl Messfehlern $|\Delta u| \leq 1$ und $|\Delta y| \leq 1$ angenommen werden. Das System wird mit dem in Abb. 5.14 dargestellten Eingangssignal angeregt und erzeugt das im unteren Bild dargestellte Ausgangssignal. Durch Überapproximation des Polytops (5.25) in Richtung der fünften Koordinate wird eine a-posteriori Einschließung des Eingangssignals ermittelt. Zu einigen Zeitpunkten kann damit das wahre Signal (Kreuze, rot) deutlich besser eingeschlossen werden, als a-priori aufgrund der Messung bekannt. Dies resultiert im wesentlichen aus den in der Simulation auftretenden Messfehlern. Dazu vergleiche man die gemessenen Signale, rot gestrichelt, mit den tatsächlichen Werten. Da im diesem Fall die Ausgabegleichung nach der Beobachtung neu ausgewertet wurde, konnte auch ein verbesserte Einschließung der Ausgangsgröße ermittelt werden. \square

5.4. Verwendung von Störmodellen

Liegt ein Modell der Störung vor, so kann dies bei der Zustandsmengenbeobachtung verwendet werden, wie in der Beobachterstruktur (Abb. 5.1) dargestellt. Das Störmodell ist im Prinzip ein mengenbasierter Störgenerator. In diesem Kontext erzeugt der

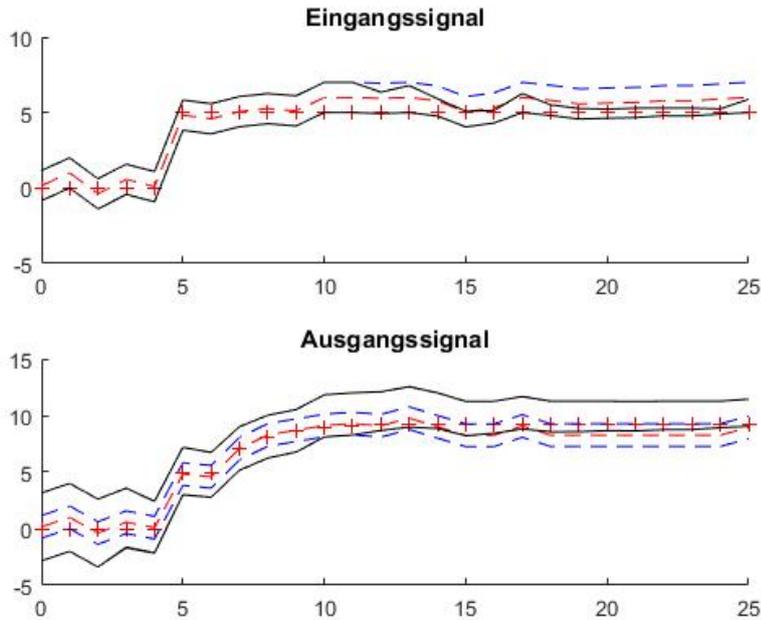


Bild 5.14: Zustandseinschließung für ein System dritter Ordnung mit Durchgriff.

Störgenerator Intervalle bzw. bei mehrdimensionalen Signalen Folgen von Mengen von zulässigen Störgrößenverläufen bzw. deren polytope Einschließungen. Das Störmodell hat im Allgemeinen die Darstellung (2.28) und wird nach Gleichung (2.29) an das Störmodell gekoppelt.

Ein denkbar einfaches Beispiel ist eine Störung mit beschränkter Änderungsrate, gegeben durch ein Störmodell erster Ordnung. Dieses Beispiel 5.4 zeigt, dass eine minimale Einschließung nur dadurch erreicht wird, dass das Beobachtermodell um das Störmodell erweitert wird. Da eine Störgröße ja unidirektional auf das System wirkt, ist der intuitive Ansatz durch Kopplung über das Intervall des Störsignals gegeben. Es zeigt sich aber, dass damit Information verloren geht.

Auf die Möglichkeit, in Erweiterung des folgenden Beispiels die höheren Ableitungen eines Signals durch ein Störmodell zu formen, soll hier nur hingewiesen werden. Als schwingungsfähiges System wird anschließend das Modell des Sinus-Generators vorgestellt.

Beispiel 5.4: Beobachtung bei beschränkter Störung und beschränkter Änderungsrate

Hier soll ein System zweiter Ordnung mit einem unbekanntem, aber beschränkten Störeingang

$$|d(k)| \leq d_{max} \quad \forall k > 0 \quad (5.30)$$

und einer beschränkten Änderungsrate

$$|d(k+1) - d(k)| \leq \Delta d_{max} \quad (5.31)$$

beobachtet werden. Damit ist das Störmodell durch die Gleichung

$$d(k+1) = d(k) + \Delta d, \quad (5.32)$$

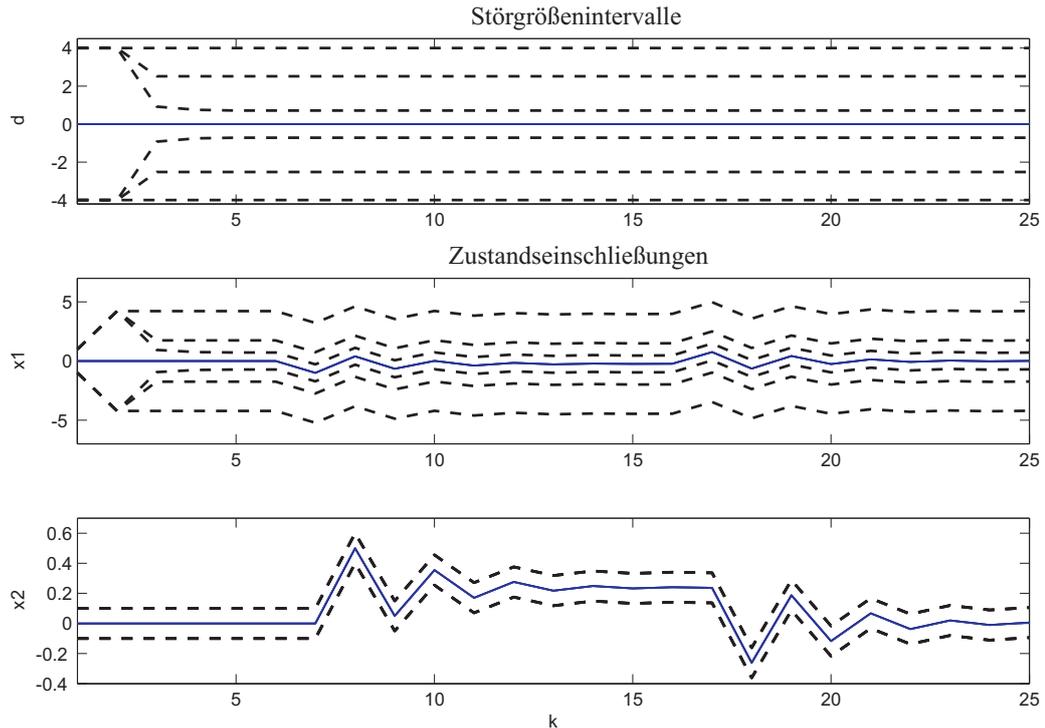


Bild 5.15: Beobachtung der Zustandsgrößen des erweiterten Modells (5.33)

also mit $\mathbf{C}_d = 1$ gegeben. Mit $\mathbf{E} = (1, 0)^T$ erhält man nach Gl. (2.29) für das Gesamtsystem die folgenden Matrizen:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Als neuer Zustand tritt die Störgröße im Zustandsvektor $\tilde{\mathbf{x}} = (d, \mathbf{x}^T)^T$ auf, weshalb der Eingangsvektor in der ersten Zeile durch die Änderungsrate erweitert wird:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}(k) &= ([-\Delta d_{max}, \Delta d_{max}], \mathcal{U}(k))^T \\ &= ([-\Delta d_{max}, \Delta d_{max}], [u_m(k) - 0.05, u_m(k) + 0.05])^T. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Da die Störung beschränkt sein soll, wurde die erweiterte Ausgabematrix $\tilde{\mathbf{C}}$ so eingeführt, als ob die Störung $d(k)$ messbar sei. Die Beschränkung der Störgröße kann durch die Erweiterung des Intervalleingangsvektors berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Y}}(k) &= ([-d_{max}, d_{max}], \mathcal{Y}(k))^T \\ &= ([-4, 4], [y_m(k) - 0.1, y_m(k) + 0.1])^T. \end{aligned}$$

Abb. 5.15 zeigt die erzielten Zustandseinschließungen bei exakter Beobachtung und für verschiedene Annahmen über die Änderungsrate Δd der Störung, wobei die wahre Störung hier verschwindet. Die äußere Einschließung der Zustände erhält man für die Annahme $\Delta d_{max} \geq 8$. Für $x_1(k) = d(k)$ kann keine Verbesserung der Einschließung $|d(k)| \leq d_{max}$ erzielt werden.

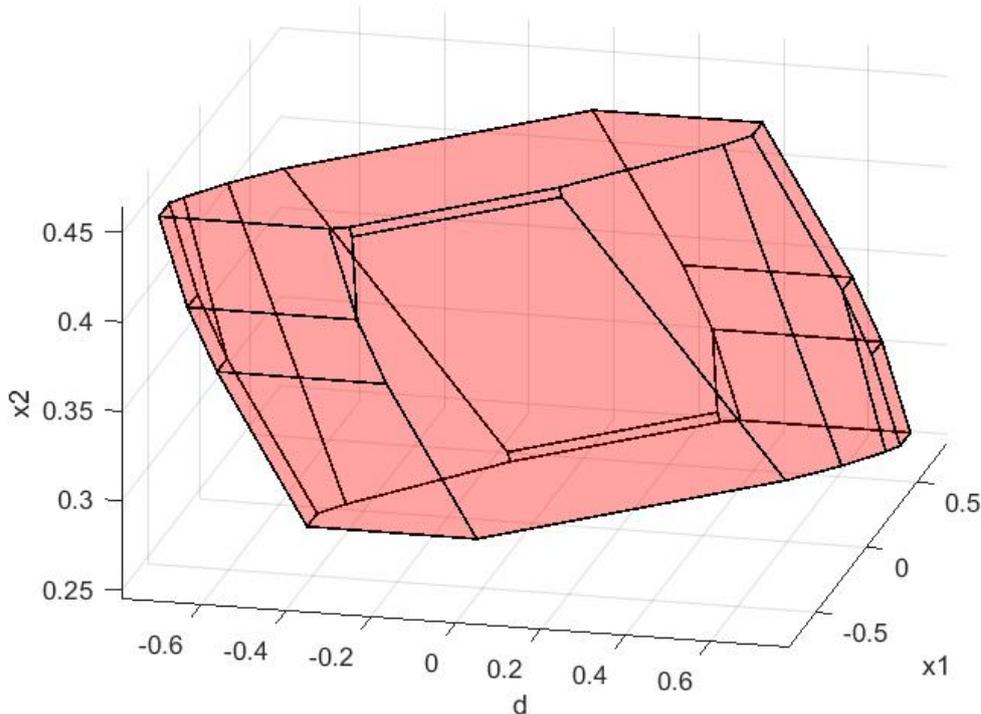


Bild 5.16: Erweitertes Zustandspolytop bei exakter Beobachtung zu Zeitpunkt $k = 10$.

Die verbesserten Einschließungen wurden unter der Annahme $\Delta d_{max} = 1$ bzw. $\Delta d_{max} = 0.2$ berechnet.

Abb. 5.16 zeigt ein Zustandspolytop im erweiterten Zustandsraum zum Zeitpunkt $k = 10$ der exakten Beobachtung, wobei sich aufgrund der Änderungsrate die besten Einschließungen ergeben. Kaum zu erkennen ist, dass das Polytop aus über 180 Randebenen besteht, aber gleichzeitig darauf hinweist, wie günstige Einschließungsrichtungen zur Überapproximation gewählt werden können. Außerdem wird die Abhängigkeit der Zustandsgröße d vor allem von x_1 deutlich. Abb. 5.17 zeigt die Zustandseinschließungen, wenn zeitweise eine Störung mit der maximalen Änderungsrate von $\Delta d_{max} = 0.2$ auftritt. Dabei wird das Ergebnis der exakten Beobachtung, in schwarz dargestellt, mit der \mathbf{N} -minimalen Beobachtung in den Richtungen $\mathbf{N}(k) = \mathbf{M}(k-1)\mathbf{A}^{-1}$ verglichen. In Abb. 5.18 wird zusätzlich die Zahl der Ungleichungen verglichen, mit denen die Zustandseinschließung beschrieben wird. Für die exakte Beobachtung ist damit deutlich mehr Rechenkapazität erforderlich. Die Zahl M der Ungleichungen bei \mathbf{N} -minimaler Beobachtung erfüllt hier für alle k die Ungleichung $M < 18$. \square

Sinus-Generator. Eine gedämpfte (oder aufklingende) Sinus-Schwingung

$$y(k) = e^{-\delta k T_s} \sin(\Omega k + \varphi) \quad (5.35)$$

wird durch die normierte Frequenz $\Omega = \omega T_s$, die Phasenverschiebung φ und die Dämpfung δ beschrieben. Der Sinus-Generator wird beispielsweise in [vG08] angegeben. Durch Transformation von Gl. (5.35) mit $\varphi = 0$ in den \mathcal{Z} -Bereich (z.B. [Unb00])

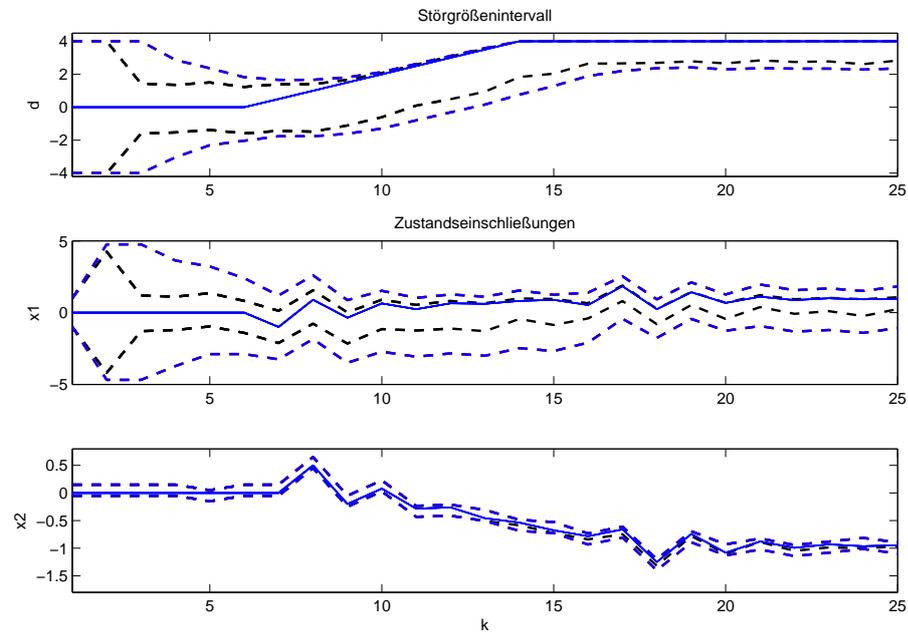


Bild 5.17: Beobachtung der Zustandsgrößen des erweiterten Modells (5.33), exakte und \mathcal{N} -minimale Beobachtung

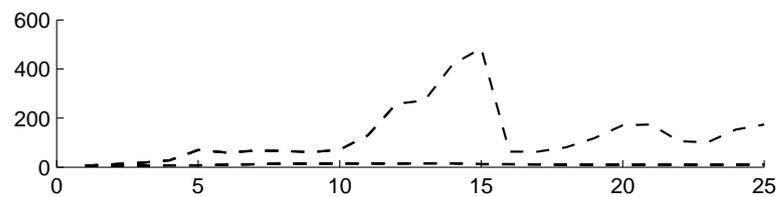


Bild 5.18: Zahl der Ungleichungen bei exakter und \mathcal{N} -minimaler Beobachtung

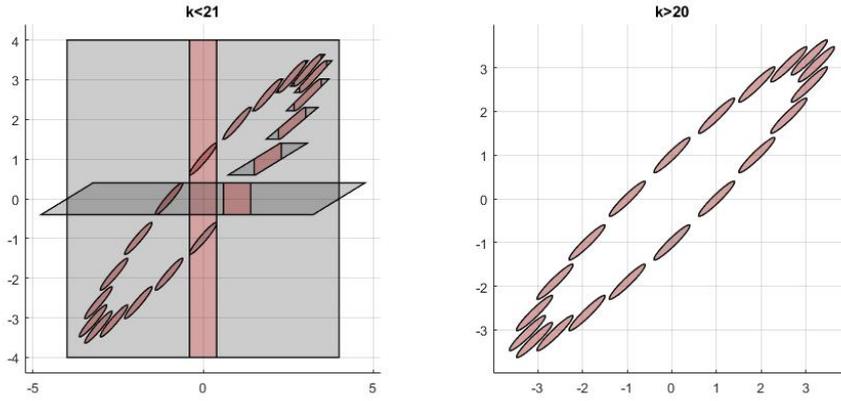


Bild 5.19: Zustandsmengen des Sinus-Generators bei Beobachtung eines sinusförmigen Signals

lässt sich eine Differenzgleichung und damit ein Zustandsraummodell als Generator erzeugen:

$$\begin{pmatrix} y(k+1) \\ y(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-\delta T_s} \cos \Omega & e^{-2\delta T_s} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(k) \\ y(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\delta T_s} \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix} u(k), \quad \mathbf{y}_0 \quad (5.36)$$

Mit $\mathbf{c} = (1 \ 0)$ erhält man den Ausgang $y(k)$ als Sinusschwingung, wenn man das System mit dem Einheitsimpuls $u(k) = \delta(k)$ anregt. Eine transformierte Form des Sinus-Generators ist durch

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{-\delta T_s} \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) \quad (5.37)$$

gegeben. Mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = (\sin(\varphi) \ -\cos(\varphi))^T$ erzeugt das autonome System mit $\mathbf{y}(k) = (1 \ 0) \cdot \mathbf{x}(k)$ die Schwingung (5.35).

Während das System (5.36) sich dazu eignet, wie im folgenden Beispiel 5.5 eine gezielte Frequenzvariation zu formulieren, eignet sich die Form (5.37) möglicherweise besser, um über einen zusätzlichen Eingang eine Amplitudendrift zuzulassen.

Beispiel 5.5: Sinus-Generator mit definierter Frequenz

Abb. 5.19 zeigt die Zustandsmengen des Sinus-Generators (5.36) ohne Dämpfung mit $\Omega = 2\pi/20$, wenn am Ausgang tatsächlich das Modellsignal anliegt und mit einem Fehler von $y(k) = y_m(k) \pm 0.4$ gemessen wird. Links sind die ersten zwanzig Schritte dargestellt. Die Messung $y(0) = 0$ führt auf den roten Längsstreifen, da die Anfangszustandsmenge (schwarz) mit $|x_i| \leq 4$ festgelegt wurde. Weiterhin erhält man die schwarzen prädizierten Mengen und die roten Schnittmengen. Der Beobachter synchronisiert sich auf das gemessene Signal, wie auch die rechts dargestellten Zustandsmengen für $k > 20$ zeigen. Die Abbildung verändert bei exakter Beobachtung die Form und Größe der Menge nicht. Durch jede Messung könnte die Zustandsmenge kleiner werden, wenn zulässige Messfehler tatsächlich auftreten würden, was hier nicht der Fall ist.

Bei Verwendung eines Sinus mit der Frequenz $\Omega + \Delta = 0.3142 + 0.01$ signalisiert der Beobachter nach $k = 98$ Schritten Inkonsistenz.

Auf die gewählte Amplitude synchronisiert sich der Beobachter aufgrund

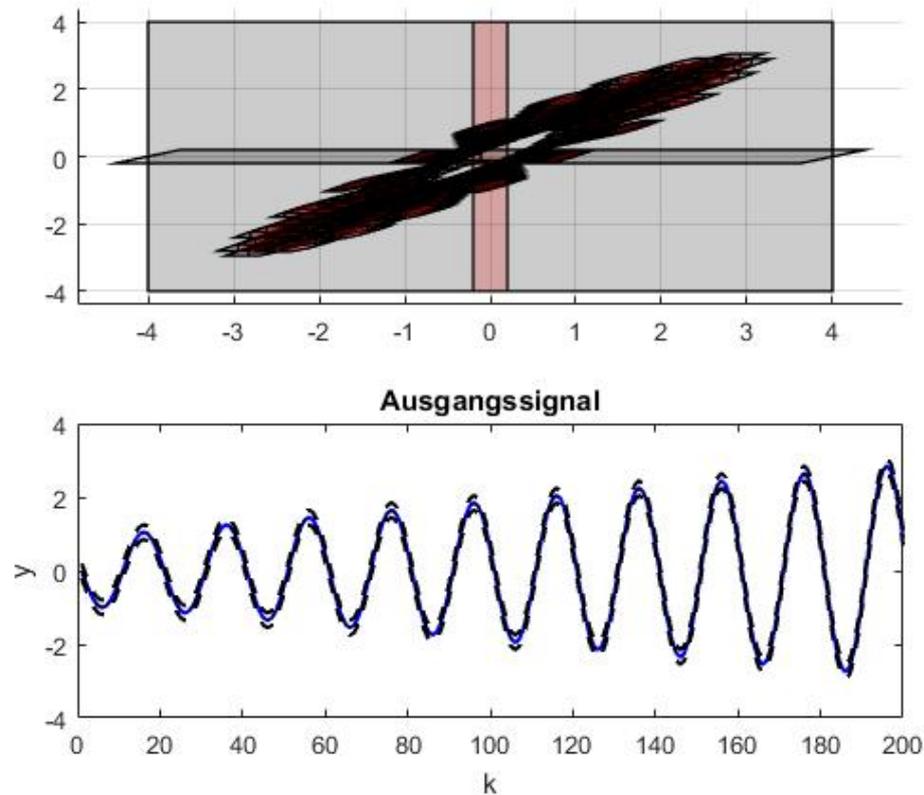


Bild 5.20: Zustandsmengen des Sinus-Generators bei Beobachtung eines aufklingenden Sinus

der sie einschließenden Anfangszustandsmenge. Zu beachten ist dabei, dass das Signal nach der Initialisierung des Generators sofort anliegen muss.

Jetzt wird der Sinus-Generator so modifiziert, dass der Parameter $\Omega \in [0.2642; 0.3642]$ als unsicherer Parameter gegeben ist. Das Modell erfasst damit nicht mehr exakt eine feste Amplitude. Abb. 5.20 zeigt, dass auch ein langsames Aufklingen der Amplitude toleriert wird. Hinzu kommt die Überapproximation bei N -minimaler Beobachtung in zwanzig feste Richtungen. \square

5.5. Beobachtung ohne Anfangszustandsmenge

Ist der Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ völlig unbekannt, so muss von einer Anfangszustandsmenge $\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^n$ ausgegangen werden. Im Allgemeinen können bei fest vorgegebenen Approximationsrichtungen \mathbf{n}_i Probleme auftreten, wenn zum Zeitpunkt $k = 0$ für mindestens eine Zustandsgröße keine endlichen Schranken $\underline{x}_i < x_i < \bar{x}_i$ angegeben werden können. Dieser Fall ist zwar technisch wenig interessant, soll aber trotzdem betrachtet werden, da er für die Beobachtbarkeits- und Beobachtungsfehleranalyse eine Rolle spielt. Unsichere Parameter $\mathbf{C}(\mathbf{p})$ führen nach Abschn. 5.2 auf nicht-konvexe Polyeder und werden deshalb hier ausgeschlossen.

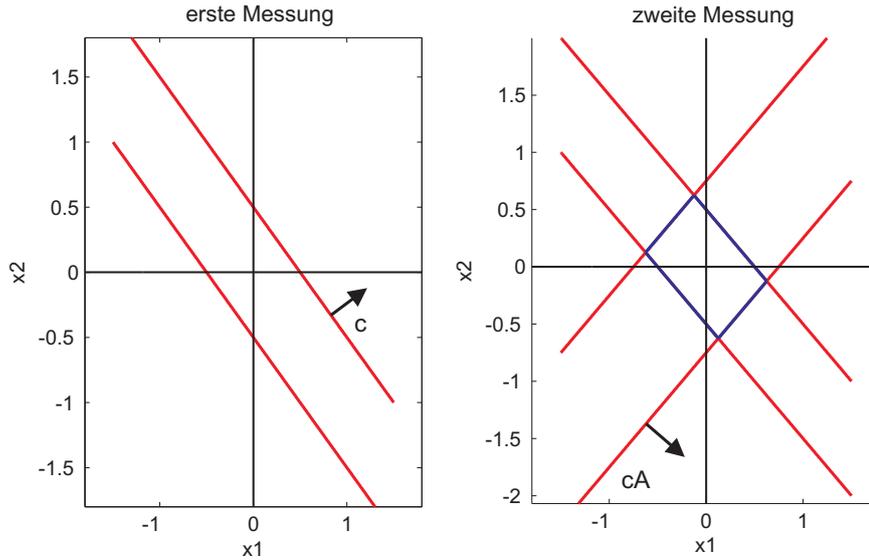


Bild 5.21: Beobachtung mit Anfangszustandsmenge $\mathcal{X}_0^* = \mathbb{R}^2$

Es soll das Modell

$$\mathcal{M} = \{LDTI_{ABC}, \mathbb{R}^n, \mathcal{U}(k), [e]_y\} \quad (5.38)$$

mit invertierbarer Systemmatrix betrachtet werden. Wie man Abb. 5.21 (rechts) für ein zweidimensionales Beispielsystem mit unbekanntem Anfangszustand entnehmen kann, ergibt sich durch die Messung $\mathbf{y}(0)$ ein nicht beschränktes Polyeder $\mathcal{X}^*(0) = \mathcal{X}_m(0)$:

$$\mathcal{X}^*(0) := \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{y}(0) + \Delta \mathbf{y} \\ -(\mathbf{y}(0) - \Delta \mathbf{y}) \end{pmatrix} \right\} \quad (5.39)$$

Wenn für den Rang der Ausgabematrix $\text{rank}(\mathbf{C}) < n$ gilt, gibt es Richtungen im Zustandsraum, für die das Polyeder nicht beschränkt ist. Damit führt auch die Prädiktion auf ein nicht beschränktes Polyeder im Zustandsraum. Erfolgt die Prädiktion mit Methoden der linearen Programmierung, so ist der Ausdruck

$$b_i = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}(0)} \mathbf{n}_i^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (5.40)$$

auszuwerten. In Abb. 5.21 (links) erkennt man, dass nur die Wahl $\mathbf{n}_i^T = \pm \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{-1}$ auf einen endlichen Wert führt. Deshalb kann schon eine numerische Ungenauigkeit in der Auswertung des Richtungsvektors oder der Zielfunktion zur Unlösbarkeit des Problems führen bzw. die numerische Auswertung von (5.40) auf $b_i = \infty$ führen. Damit folgt für die Prädiktion mit willkürlich festgelegten Richtungen, dass $\mathcal{X}(k) = \mathbb{R}^n$ für alle Zeiten k erhalten bleibt. In der praktischen Anwendung ist deshalb immer eine genügend große Anfangszustandsmenge zu wählen.

Für exakte Modelle vom Typ \mathcal{M} kann aber die Prädiktion mit Hilfe der Projektionsdarstellung (4.26) erfolgen. Erst nach Bildung der Schnittmenge mit der zweiten Messung erhält man für das zweidimensionale Beispiel ein beschränktes Polytop, was in Abbildung 5.21 (rechts) in blau dargestellt ist. Im Allgemeinen lässt sich das Polytop

$\mathcal{X}^*(1)$ wie folgt darstellen:

$$\mathcal{X}^*(1) := \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{M}_b(1) \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{y}(1) + \Delta\mathbf{y} \\ -(\mathbf{y}(1) - \Delta\mathbf{y}) \\ \bar{\mathbf{q}}(1) \\ -\underline{\mathbf{q}}(1) \\ \mathbf{q}_b(1) \end{pmatrix} \right\} \quad (5.41)$$

mit

$$\bar{\mathbf{q}}(1) = \mathbf{y}(0) + \Delta\mathbf{y} + \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(0)} \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.42)$$

$$\underline{\mathbf{q}}(1) = \mathbf{y}(0) - \Delta\mathbf{y} + \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(0)} \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.43)$$

Mit der Annahme endlicher Unsicherheiten in den Ein- und Ausgangssignalen sind die Terme $\bar{\mathbf{q}}$ und $\underline{\mathbf{q}}$ endlich und offensichtlich gilt $\underline{\mathbf{q}} < \bar{\mathbf{q}}$, elementweise. Die mit \mathbf{M}_b bezeichneten neuen Richtungen entstehen durch die ungenau bekannten Eingangssignale und können nur als Linearkombinationen von bereits vorhandenen Zeilen des Polytops gegeben sein. In der angegebenen Weise kann die weitere Entwicklung der minimalen Zustandsmenge \mathcal{X}^* über der Zeit durch Systeme von Ungleichungen dargestellt werden, wobei in der Regel redundante Zeilen auftreten. Zum Zeitschritt k führt die exakte Beobachtung auf das folgende Gleichungssystem:

$$\mathcal{X}^*(k) := \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-k} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-k} \\ \mathbf{M}_b(k) \\ \mathbf{M}_b(k-1)\mathbf{A}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_b(1)\mathbf{A}^{-(k-1)} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}(0) \\ -\underline{\mathbf{q}}(0) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}(k) \\ -\underline{\mathbf{q}}(k) \\ \mathbf{q}_b(1) \\ \mathbf{q}_b(2) \\ \vdots \\ \mathbf{q}_b(k-1) \end{pmatrix} \right\} \quad (5.44)$$

mit

$$\bar{\mathbf{q}}(k) = \bar{\mathbf{q}}(k-1) + \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(k-1)} \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.45)$$

$$\underline{\mathbf{q}}(k) = \underline{\mathbf{q}}(k-1) + \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(k-1)} \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.46)$$

und

$$\bar{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{y}(0) + \Delta\mathbf{y} \quad (5.47)$$

$$\underline{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{y}(0) - \Delta\mathbf{y}. \quad (5.48)$$

Damit wird die möglicherweise schnell wachsende Komplexität der Beschreibung deutlich. Andererseits treten in der Regel eine Vielzahl redundanter Ungleichungen auf, die entfernt werden können. Die aufgrund von ungenau bekannten Eingängen entstehenden Ungleichungen können nur schwer analytisch angegeben werden. Die Berechnung einer Überapproximation von Gleichung (5.44) ohne diese Ungleichungen kann durchgeführt werden, bis ein beschränktes Polytop $\mathcal{X}(k) \supseteq \mathcal{X}^*(k)$ entsteht und somit auf ein beliebiges Prädiktionsverfahren zurückgegriffen werden kann. Im folgenden Abschnitt wird von der klassischen Beobachtbarkeit auf die Beschränktheit des Polytops (5.44) und seiner Überapproximationen geschlossen. Für Modelle vom Typ \mathcal{M} können damit auch für $\mathcal{X}(0) = \mathbb{R}^n$ Beobachter initialisiert werden, was u.a. im Beispiel 5.6 gezeigt wird.

5.6. Beobachtbarkeit und Beschränktheit

Für kontinuierliche wie zeitdiskrete Systeme stellt die Beobachtbarkeitsanalyse die Frage, ob der Anfangszustand eines dynamischen Systems in einem endlichen Zeitintervall aus dem Verlauf der Ein- und Ausgangssignale berechnet werden kann. Es wird also davon ausgegangen, dass der Anfangszustand der Systems $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ zunächst unbekannt ist und ermittelt werden soll. Ist das System beobachtbar, so ist dies auch hinreichend für Rekonstruierbarkeit, d.h. der Zustand $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ lässt sich ebenfalls berechnen. Damit kann ein Beobachter zur Ermittlung der aktuellen Zustandsgröße entworfen werden.

Bei der Zustandsmengenbeobachtung ist die Ermittlung des exakten Zustands prinzipiell nicht möglich, weshalb der Begriff der Zustandsmengenbeobachtbarkeit neu definiert werden muss. Da der Begriff unabhängig von der Fragestellung nach einem geeigneten Beobachtungsverfahren sein soll, beziehen sich die Definitionen auf die exakten prädierten bzw. beobachteten Zustandsmengen \mathcal{X}_p^* und \mathcal{X}^* . In [Rie01a], [Pla06] und [dL08] werden neue Definitionen angegeben, welche sich auf verschiedene Aspekte der Beobachtung beziehen, aber auch verschiedene Nachteile haben:

- In [Rie01a] wird gefordert, dass für den Beobachtungsfehler $\Delta \mathbf{x}$ endliche Schranken angegeben werden können. Um die Definition unabhängig vom betrachteten Anfangszustand zu formulieren, wird dafür ein endlicher Zeithorizont \bar{k} vorgesehen, so dass für $k > \bar{k}$ gefordert wird:

$$\Delta \mathbf{x} < \mathbf{e}_x. \quad (5.49)$$

Die beobachtete Zustandsmenge muss dann beschränkt sein. Beispiel 5.6 wird aber später zeigen, dass in manchen Fällen (5.49) nur erfüllt werden kann, wenn eine beschränkte Anfangszustandsmenge vorausgesetzt wird.

- In [Pla06] wird gefordert, dass die Messung eine Verbesserung des Beobachtungsergebnisses bewirkt. Damit soll sichergestellt werden, dass das Beobachtungsergebnis nicht allein durch die Prädiktion bestimmt wird und die Messung überflüssig wird. Die Bedingung kann sowohl, wie für die klassische Beobachtbarkeit üblich, für die Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0^* ,

$$\mathcal{X}^*(0 \mid 0 \dots k) \subseteq \mathcal{X}^*(0 \mid 0 \dots k - 1) \quad (5.50)$$

als auch für die aktuelle Zustandsmenge $\mathcal{X}^*(k)$ angegeben werden:

$$\mathcal{X}_p^*(k - 1) \cap \mathcal{X}_m(k) \subseteq \mathcal{X}_p^*(k - 1). \quad (5.51)$$

Wie das Beispiel 5.6 auch zeigt, wird damit aber ein Anwachsen des Beobachtungsfehlers nicht ausgeschlossen. Des Weiteren kann die Frage, ob eine Messung zu einer Verbesserung der beobachteten Zustandsmenge führt, in manchen Fällen nur in Abhängigkeit des aktuell auftretenden Messfehlers $\mathbf{e}_y(k)$ beantwortet werden.

- In [dL08] wird eine Definition der Zustandsmengenbeobachtbarkeit über die zeitliche Entwicklung des Volumens beobachteter Zustandsmengen angegeben. Damit soll implizit Beschränktheit der Zustandsmengen sichergestellt werden. Allerdings kann der Beobachtungsfehler und damit das Volumen der Zustandsmengen bei

ungenau bekannten Systemparametern von den aktuellen Eingangssignale abhängen. Die Definition durch Volumina ist insbesondere dann problematisch, wenn das Beobachtungsergebniss für eine Teilmenge der Zustandsgrößen gegen den wahren Wert konvergiert. Im Grenzfall verschwindet das Volumen der Zustandsmenge, während der Beobachtungsfehler für andere Zustandsvariablen über alle Grenzen anwachsen kann.

Hier soll zum Einen gezeigt werden, wie sich die klassische Beobachtbarkeit auf die Eigenschaften eines Intervallbeobachters auswirkt. Zum Anderen wird gezeigt, dass eine Intervallbeobachtung eventuell auch sinnvoll für im klassischen Sinne nicht beobachtbare Systeme eingesetzt werden kann.

In [Pla06] wird ein Theorem zur Beschränktheit der minimalen Zustandsmenge \mathcal{X}^* für exakt bekannte System angegeben, welches den Zusammenhang zur klassischen Beobachtbarkeit herstellt. Das Theorem wird hier in leicht veränderter Form angegeben:

Theorem 3 (*Beschränktheit der minimalen Zustandsmenge*)

Gegeben sei ein exakt bekanntes lineares Zustandsraummodell \mathcal{M} mit beschränkten Unsicherheiten in den Ein- und Ausgangssignalen und mit regulärer Systemmatrix \mathbf{A} . Bei unbekanntem Anfangszustand $\mathcal{X}(0) = \mathbb{R}^n$ ist die exakte Zustandsmenge $\mathcal{X}^*(k)$ genau dann beschränkt für alle $k > \nu$, wenn das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{C}) beobachtbar ist. Mit $\nu \leq n$ wird der Beobachtbarkeitsindex bezeichnet.

Beweis: Gleichungen (5.44) zeigt, wie schrittweise minimale Zustandpolytope bei unbekanntem Anfangszustand entstehen. Nach spätestens k Schritten liegt eine Einschließung der Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}} \supseteq \mathcal{X}^*$ in den Richtungen

$$\tilde{\mathcal{X}}(k) := \left\{ \mathbf{x} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-(k-1)} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-(k-1)} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{M}}} \mathbf{x} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}(0) \\ -\underline{\mathbf{q}}(0) \\ \bar{\mathbf{q}}(1) \\ -\underline{\mathbf{q}}(1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}(k-1) \\ -\underline{\mathbf{q}}(k-1) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}} \right\} \quad (5.52)$$

vor. Ist das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{C}) beobachtbar, also

$$\text{rank}(\mathbf{S}_B) = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{(n-1)} \end{pmatrix} = m \quad (5.53)$$

so hat mit $\det \mathbf{A} \neq 0$ die Matrix $\tilde{\mathbf{M}}$ nach spätestens n Schritten vollen Spaltenrang, womit die Polytope $\tilde{\mathcal{X}}$ und \mathcal{X}^* beschränkt sind. Die Notwendigkeit ergibt sich daraus, dass die zusätzlichen Richtungen in Gleichung (5.44), nur dann endliche Beschränkungen des Polytops \mathcal{X}^* darstellen, wenn sie durch Linearkombinationen der Zeilen \mathbf{m}_i^T von $\tilde{\mathbf{M}}$ darstellbar sind. Dies folgt aus der Definition der Minkowski-Summe und

$$\mathcal{X}_p^*(k) = \mathbf{A}\mathcal{X}^*(k-1) \oplus \mathcal{X}_u, \quad (5.54)$$

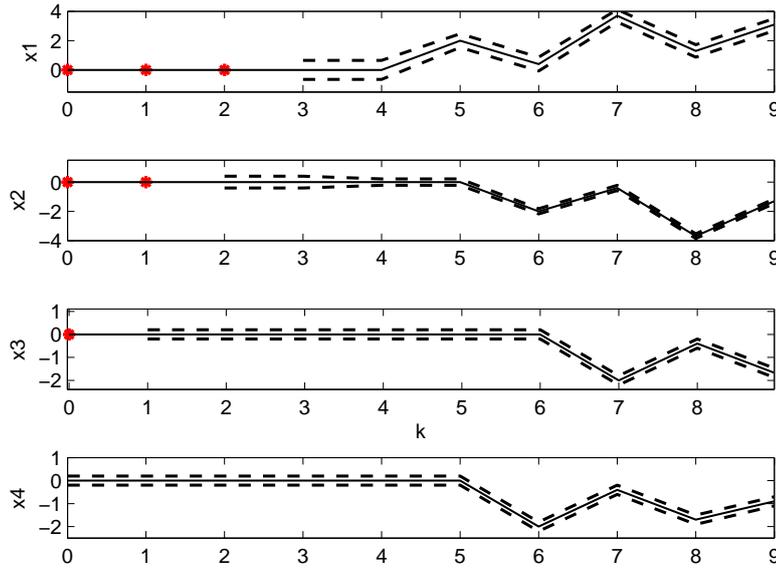


Bild 5.22: Beobachtung eines Systems vierter Ordnung bei unbekanntem Anfangszustand

womit verdeutlicht wird, dass eine endliche Schranke nur neu eingeführt wird, wenn sie aus der Transformation $\mathbf{A}\mathcal{X}^*(k-1)$ hervorgeht. ■

Beispiel 5.6: Beobachtung bei unbekanntem Anfangszustand.

Ein Beispielsystem vierter Ordnung soll durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \quad (5.55)$$

mit den Unsicherheiten $\Delta u = 0.05$ und $\Delta y = 0.2$ gegeben sein. Das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)$ ist beobachtbar. Abb. 5.22 stellt die mit Hilfe der exakten Mengenbeobachtung ermittelten Einschließungen für die Zustandsvariablen x_1, \dots, x_4 dar. Der wahre Wert des Zustandes wird von den Intervallgrenzen eingeschlossen. Die Punkte an den ersten Beobachtungsschritten deuten an, dass keine endliche Einschließung ermittelt werden konnte. Erst nach $k = 4$ Zeitschritten liegen Intervalle für alle Zustandsvariablen vor. Im Allgemeinen kann man erst nach $k = n$ Zeitschritten von einer Einschließung einer speziellen und zugleich aller Zustandsvariablen ausgehen. Das hier schrittweise für $k = \{0 \dots 4\}$ die Zustandsvariablen eingeschlossen werden, ist der speziellen Struktur der Matrix \mathbf{A} mit der inversen

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

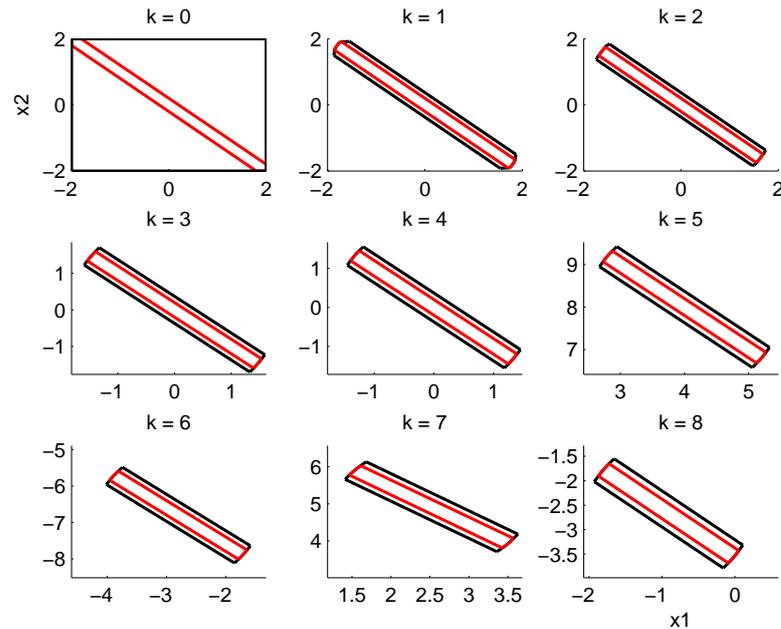


Bild 5.23: Zustandspolytope bei Beobachtung eines nicht beobachtbaren Systems zweiter Ordnung

zuzuschreiben. Das Polyeder (5.52) liefert für $k < 4$ Einschließungen der Zustände $x_{4-k} \dots x_4$. \square

Für nicht beobachtbare Systeme kann bei Vorgabe einer beschränkten Anfangszustandsmenge $\mathcal{X}(0)$ möglicherweise sinnvoll eine Zustandsmengenbeobachtung durchgeführt werden, so dass der Beobachtungsfehler ab einem Zeitpunkt $k > \tilde{k}$ eine obere Schranke nicht mehr überschreitet.

Beispiel 5.7: Zustandsmengenbeobachtung für ein nicht Kalman-beobachtbares System.

Ein Beispielsystem zweiter Ordnung ist durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (1 \quad 1) \quad (5.57)$$

ung $\Delta u = 0.05$ und $\Delta y = 0.2$ gegeben. Das System ist nicht Kalman-beobachtbar. Abb. 5.23 stellt die exakten, ermittelten Polytope im Zustandsraum dar, wobei die prädizierten Polytope (schwarz) für $k > 0$ immer die gleiche Orientierung wie die Messpolytope aufweisen. Es wird in jedem Zeitschritt eine Einschränkung der Menge möglicher Zustände erzielt, obwohl das System instabil ist. Abb. 5.24 ermöglicht den Vergleich zwischen den mit der Beobachtung erzielten Einschließungen der Zustandsgrößen und den durch Prädiktion des Systems mit ungenau bekanntem Eingang ermittelten Werten. Man erkennt, dass ausgehend von identischen Anfangszustandsmengen der Prädiktionsfehler mit der Zeit zunimmt, während der Beobachtungsfehler einen nahezu konstanten Wert annimmt. In Abb. 5.25 sind zum Vergleich die Zustandsintervalle für zwei verschiedene Anfangszustandsmengen dargestellt. Auch für große Unsicherheit in den

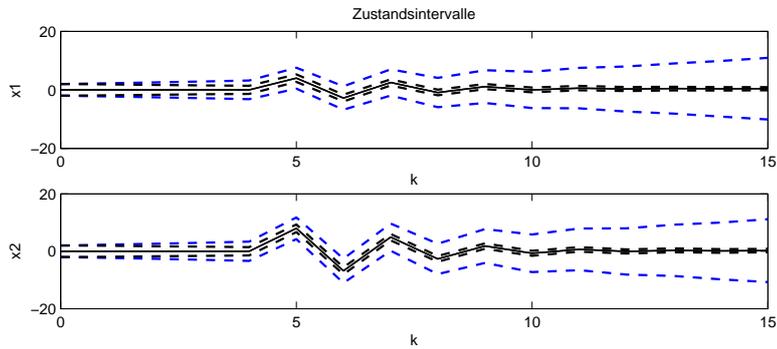


Bild 5.24: Zustandsintervalle bei Beobachtung und Prädiktion für ein nicht beobachtbares System

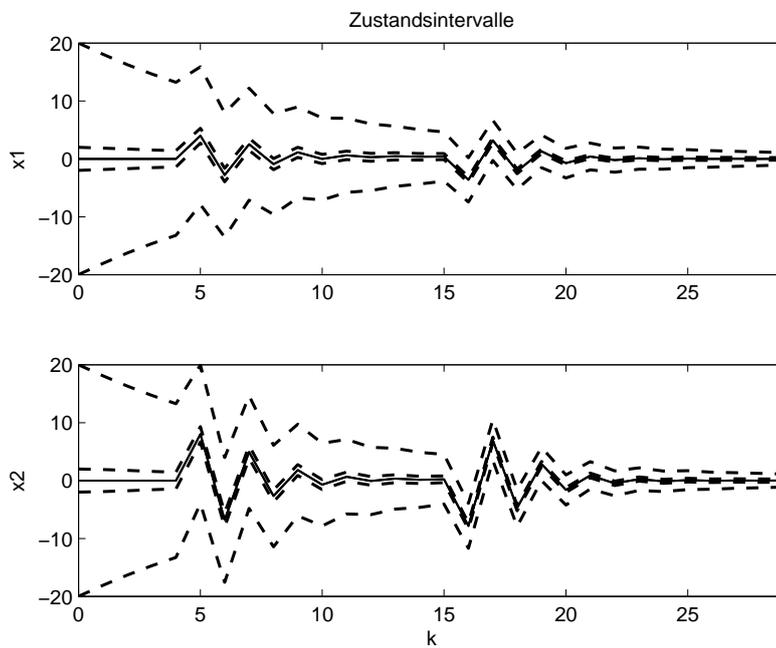


Bild 5.25: Zustandsintervalle bei der Beobachtung für ein nicht beobachtbares System mit unterschiedlichen Anfangszustandsmengen

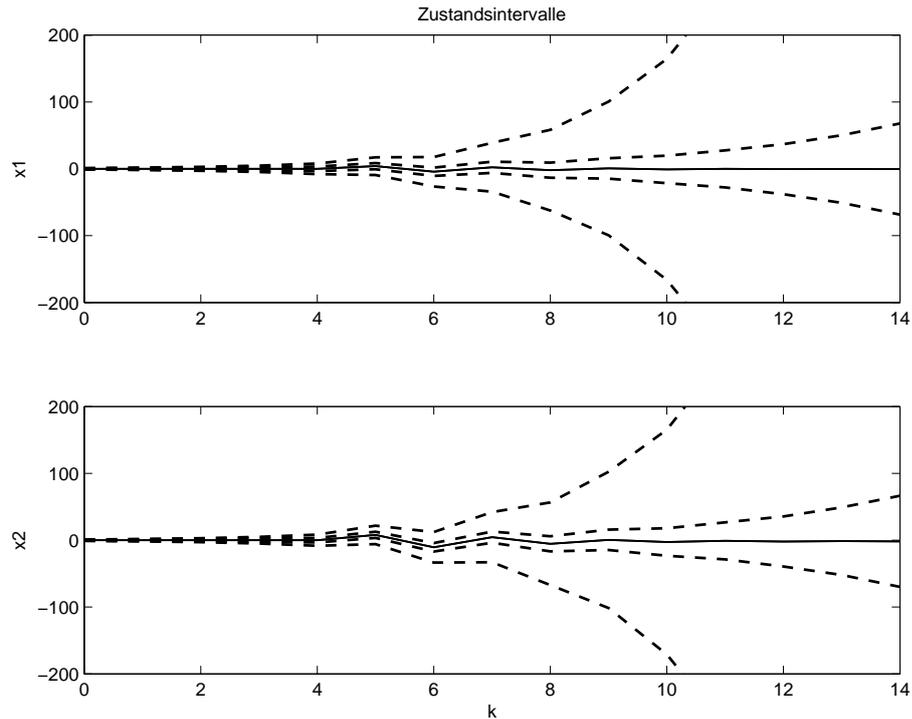


Bild 5.26: Zustandsintervalle für das modifizierte System ($\tilde{\mathbf{A}}$), ermittelt durch Prädiktion und Beobachtung

Anfangszustandsmengen nimmt der Beobachtungsfehler mit der Zeit ab und konvergiert gegen einen gemeinsamen Grenzwert. Für ein anderes System mit modifizierter Systemmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}} = 1.5\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.15 \\ 0.15 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad (5.58)$$

sind die Ergebnisse von Prädiktion und Beobachtung in Abb. 5.26 dargestellt. Durch die Beobachtung kann zwar eine deutliche Verbesserung der Einschließung der wahren Zustandsgrößen gegenüber der Prädiktion erreicht werden, aber der Beobachtungsfehler nimmt mit der Zeit zu und wächst über alle Schranken. Eine Zustandsmengenbeobachtung ist in diesem Fall nicht sinnvoll. \square

5.7. Abschätzung des Beobachtungsfehlers

Zur Bewertung eines Verfahrens der Zustandsmengenbeobachtung ist es wichtig, für den Beobachtungsfehler eine obere Schranke angeben zu können. Dies ist sicher nur dann möglich, wenn die Zustandsmenge beschränkt ist. In [Rie01a] und [Koe01] wird für exakt bekannte Systeme mit Eingangs- und Messunsicherheiten eine obere Schranke $\overline{\Delta \mathbf{x}}$ für den Beobachtungsfehler hergeleitet, die ab einem Zeitpunkt $k > \bar{k}$ oder für $k \rightarrow \infty$ nicht überschritten wird. Die angegebenen Schranken beziehen sich aber auf bestimmte Verfahren der Zustandseinschließung, zum Einen auf eine achsenparallele Überapproximation der Zustandsmenge \mathcal{X} in jedem Zeitschritt, zum Anderen auf eine als messungsparallel bezeichnete Methode der Überabschätzung.

Exakte Beobachtung. Bei der exakten Beobachtung ist das Zustandspolytop zum Zeitpunkt k durch Gleichung (5.44) gegeben, wobei von Modellen der Form $\mathcal{M} = \{LDTI_{ABC}, \mathbb{R}^n, [\mathbf{e}]_u, [\mathbf{e}]_y\}$ ausgegangen wird. Eine obere Schranke für den Beobachtungsfehler ist dabei in den Richtungen \mathbf{M}_f von \mathcal{X} mit

$$\mathcal{X}_f^*(k) := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{M}_f \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_f\} \quad (5.59)$$

$$:= \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-(k-1)} \\ \tilde{\mathbf{M}}_b(k) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{M}}_b(1)\mathbf{A}^{-k} \end{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 2\Delta y \\ \bar{\mathbf{q}}(1) - \underline{\mathbf{q}}(1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}(k) - \underline{\mathbf{q}}(k) \\ \tilde{\mathbf{q}}_b(1) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{q}}_b(k-1) \end{pmatrix} \right\} \quad (5.60)$$

gegeben. Betrachtet man beispielweise die zweite Zeile, dann ist der obere Teil des Fehlerpolytops (5.59) unabhängig von den Ein- und Ausgangssignalen. Damit stellen diese Zeilen wenn das System beobachtbar ist bereits eine Abschätzung des Beobachtungsfehlers dar, sowohl für die exakte Beobachtung als auch für die \mathbf{N} -minimale Approximation mit entsprechend \mathbf{M}_f gewählten Richtungen. Die unteren, durch $\tilde{\mathbf{M}}_b, \tilde{\mathbf{q}}_b$ gegebenen Ungleichungen, sind wie schon in Gl. (5.44) schwer zu berechnen bzw. können nur durch Simulation ermittelt werden. Für die Fehlerpolytope (5.59) gilt aber

$$\mathbf{u}(k) \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{X}_f(k+1) \subseteq \mathcal{X}_f(k). \quad (5.61)$$

In jedem Zeitschritt wird bei der Beobachtung die Schnittmenge mit dem aktuellen Messpolyeder gebildet. Die größte Schnittmenge tritt jeweils dann auf, wenn ein zentraler Schnitt der symmetrischen Messpolyeder bei $\mathbf{y}(k) \equiv 0$ durchgeführt wird, wie auch in [Rie01b] argumentiert wird. Der Beobachtungsfehler in den durch die Matrix \mathbf{M}_f gegebenen Richtungen, der in diesem Fall austritt, wird genau durch $\mathcal{X}_f^*(k)$ beschrieben unter der Bedingung $\mathbf{u}(k) \equiv 0$. Damit kann zu jedem Zeitschritt $k > 0$ eine Überapproximation des Beobachtungsfehlers durch Projektion von (5.59) in beliebige Raumrichtungen berechnet werden. Man erhält also für im klassischen Sinne beobachtbare Systeme eine obere Abschätzung des Beobachtungsfehlers durch Beobachtung des Systems mit dem Anfangszustand $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ bei verschwindenden Ein- und Ausgangssignalen. Dies belegen die folgenden Simulation, auch wenn hier kein formaler Beweis geführt wird.

Beispiel 5.8: Beobachtungsfehlerschranken bei exakter Prädiktion.

Für das in Beispiel 5.6 gegebene System vierter Ordnung wird eine obere Schranke für den Beobachtungsfehler über der Zeit k berechnet. Abb. 5.27 zeigt, dass erst ab $k = 3$ für alle Zustandsgrößen eine in schwarz dargestellte Schranke existiert. Zur Verifikation wurde eine Vielzahl von Beobachtungen mit unterschiedlichen Anfangszustandsmengen, Realisierungen von wahren Eingangsfolgen und Messfehlern für die Ein- und Ausgangssignale durchgeführt. Man erkennt auch, dass Beobachtungen aufgetreten sind, bei denen der Beobachtungsfehler fast verschwindet. Für den Zustand x_2 ist das besonders deutlich zu erkennen. Die Kurven wurden unter der Annahme

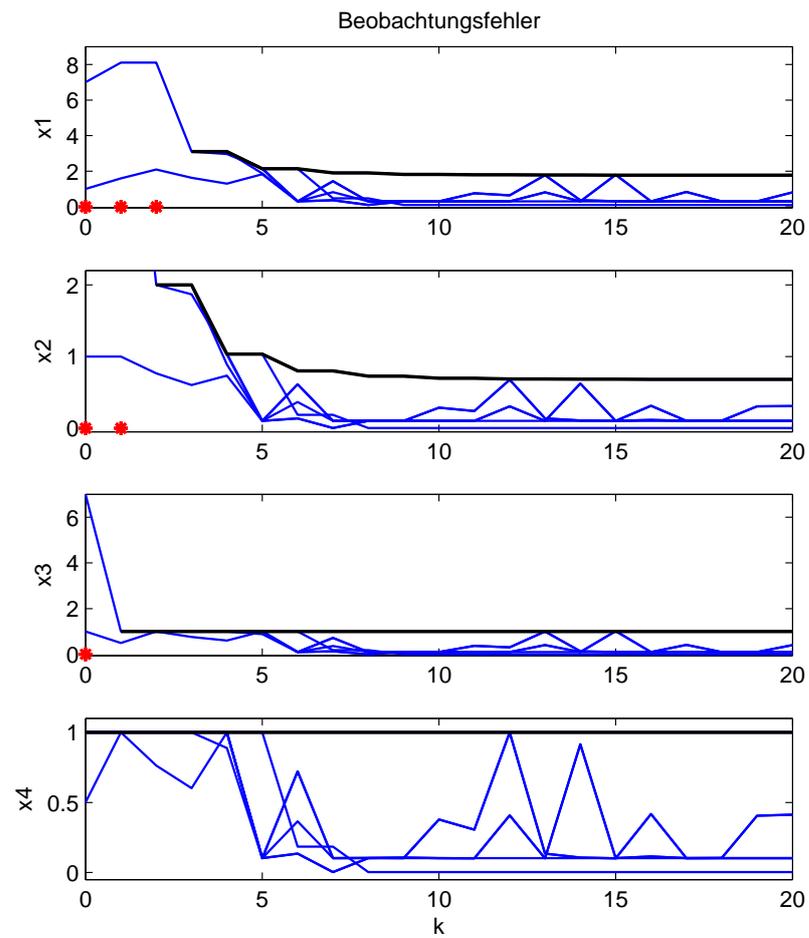


Bild 5.27: Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke für ein System \mathbf{A} vierter Ordnung

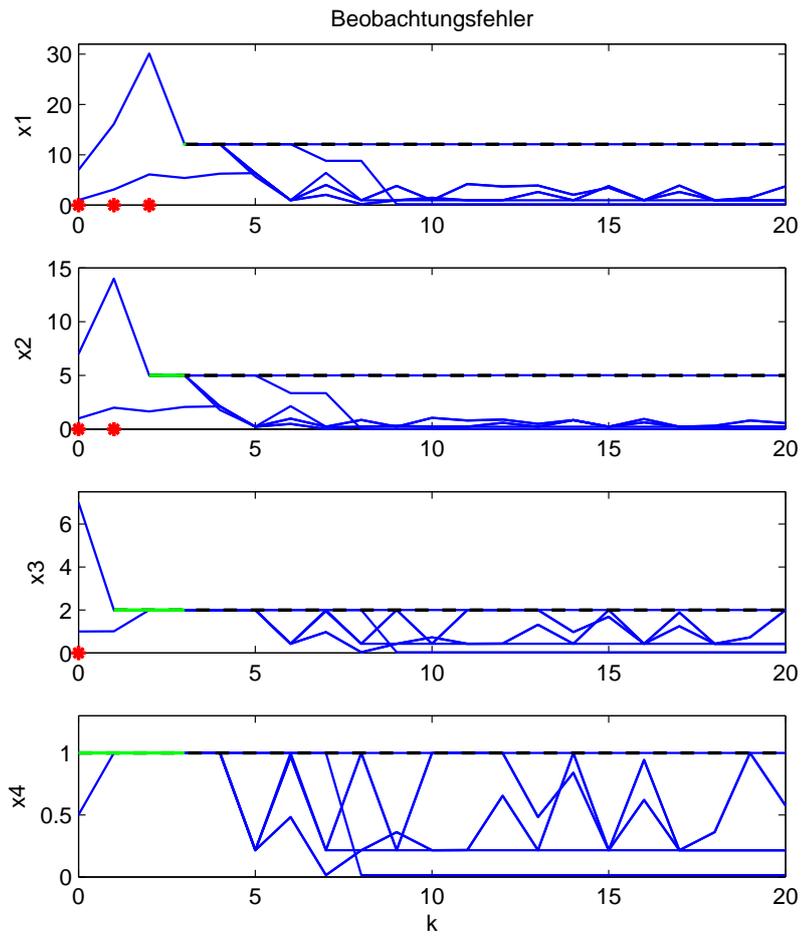


Bild 5.28: Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke für ein System $\tilde{\mathbf{A}}$ vierter Ordnung

konstanter maximaler Messfehler

$$u_m(k) = u^*(k) + \Delta u - \epsilon \quad \text{und} \quad (5.62)$$

$$y_m(k) = y^*(k) - \Delta y + \epsilon \quad (5.63)$$

(für sehr kleine ϵ) erzielt. Diese Annahmen sind für das System mit positiver Verstärkung widersprüchlich und führen deshalb auf besonders kleine Zustandspolytope, womit das scheinbare paradoxe Verhalten demonstriert wird, dass große Messfehler auf besonders gute Zustandseinschließungen führen. Ab $k = 7$ ist kaum eine Verbesserung der Zustandseinschließungen zu erkennen, obwohl die im Folgenden diskutierte Abbruchbedingung (5.66) nicht erfüllt ist. Abb. 5.28 zeigt die erhaltenen Zustandseinschließungen für ein System mit der modifizierten Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = 2 \cdot \mathbf{A}$. Bei $k = 3$ ist die Abbruchbedingung (5.66) erfüllt und es wird keine Verbesserung der oberen Abschätzung des Beobachtungsfehlers mehr erzielt. \square

Beobachtung mit zeitinvarianten, symmetrischen Richtungen. Die Beobachtung soll hier durch \mathbf{N} -minimale Prädiktion und einer damit verbundenen Überapproximation in den zeitinvarianten Richtungen \mathbf{N} erfolgen. Des Weiteren soll hier gefordert werden, dass symmetrische Richtungen verwendet werden, also

$$\mathbf{N} = (\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\eta})^T \quad (5.64)$$

mit Matrizen $\boldsymbol{\eta}$ darstellbar ist, wobei die Spaltenvektoren von $\boldsymbol{\eta}$ die Einschließungsrichtungen charakterisieren. Die Untersuchungen zur Approximation in den Richtungen $\pm \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$ lassen vermuten, dass symmetrische Einschließungen Fehlerabschätzungen zulassen. Dies ist zwar nicht formal bewiesen, wird aber durch die folgenden Simulationsergebnisse nahegelegt. Wie in Abschnitt 5.5 beschrieben, muss nach der ersten Messung eine beschränkte Zustandsmenge vorliegen, um beschränkte Zustandspolytope prädiktionieren zu können. Deshalb wird von einer beschränkten Anfangszustandsmenge $\mathcal{X}(0)$ ausgegangen. Die Annahme (5.64) ist deshalb notwendig, da nur so argumentiert werden kann, dass der zentrierte Schnitt von symmetrischen Polyedern für $\mathbf{y}(k) = 0$ und $\mathbf{u}(k) = 0$ die größtmögliche Unsicherheit in der gewünschten Einschließungsrichtung liefert. Damit kann die Abschätzung des Beobachtungsfehlers wieder durch Simulation mit verschwindenden Eingangs- und Fehlersignalen erfolgen. Wegen der beschränkten Anfangszustandsmenge gilt Gl. (5.61) im Allgemeinen nicht. Erst wenn für $k > \bar{k}$ zum ersten mal eine Kontraktion

$$\mathcal{X}(\bar{k} + 1) \subseteq \mathcal{X}(\bar{k}) \quad (5.65)$$

stattgefunden hat, gilt Gl. (5.61) und die Abbruchbedingung

$$\mathcal{X}_N(k + 1) = \mathcal{X}_N(k), \quad (5.66)$$

kann geprüft werden. Im Allgemeinen muss die Simulation zur Ermittlung der oberen Schranke des Beobachtungsfehlers bei Unterschreiten einer durch ein $\epsilon > 0$ spezifizierten Verbesserung der Einschließung pro Zeitschritt abgebrochen werden.

Beispiel 5.9: Beobachtungsfehler bei symmetrischer, \mathbf{N} -minimaler Beobachtung.

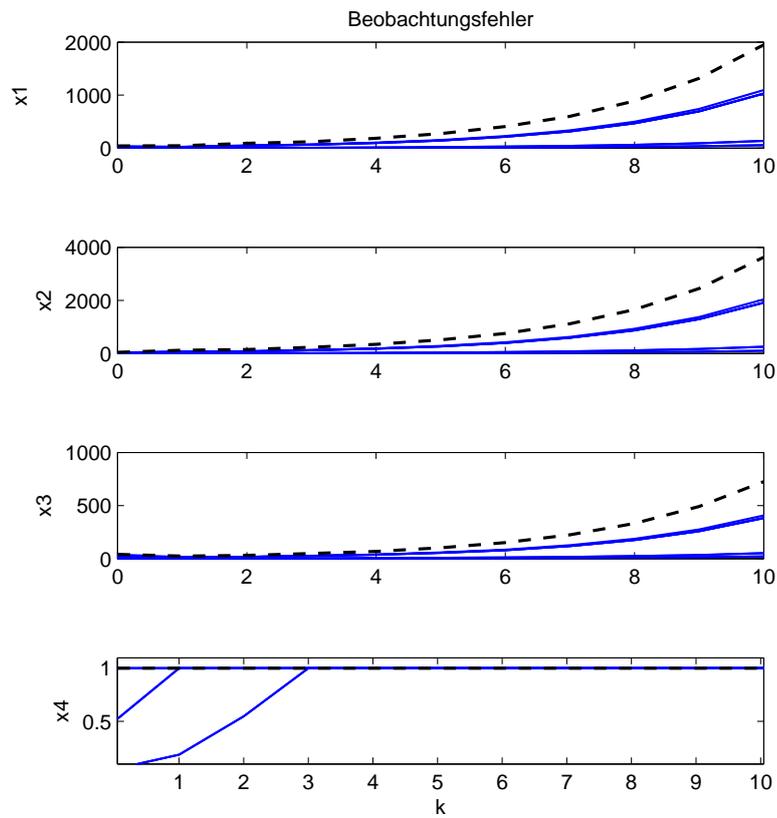


Bild 5.29: Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke bei Beobachtung mit \mathbf{N}_1

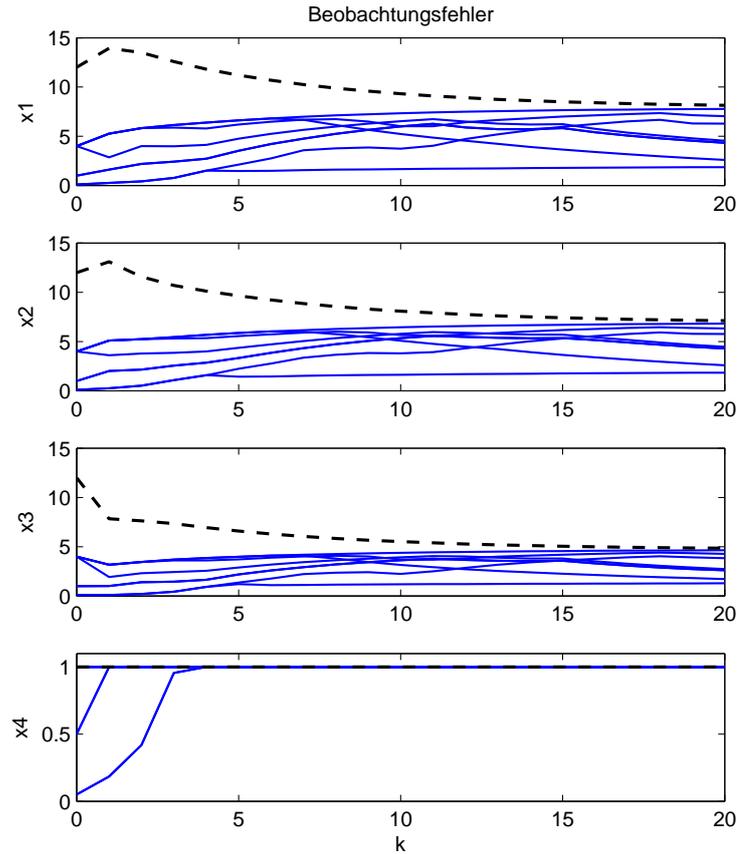


Bild 5.30: Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke bei Beobachtung mit \mathbf{N}_2

Im Folgenden wird das durch

$$\mathbf{A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1.75 & 0.5 & 2.5 \\ -5 & -1.25 & -2.5 & -5 \\ 1 & 0.25 & 0.5 & 2.5 \\ -5 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{c}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$
(5.67)

gegebene System betrachtet. Abb. 5.29 zeigt, dass man für achsenparallele Überapproximation

$$\mathbf{N}_1 = (\mathbf{I}_4, -\mathbf{I}_4)^T$$
(5.68)

in jedem Zeitschritt expandierende Zustandsmengen erhält, womit auch die obere Abschätzung des Beobachtungsfehlers (schwarz) für alle nicht messbaren Zustände gegen Unendlich strebt. Die Beobachtung kann verbessert werden, indem die \mathbf{N} -minimale Überapproximation in zusätzlichen Richtungen durchgeführt wird. Abb. 5.30 zeigt den Beobachtungsfehler, wobei die Prädiktion zusätzlich in den Richtungen

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
(5.69)

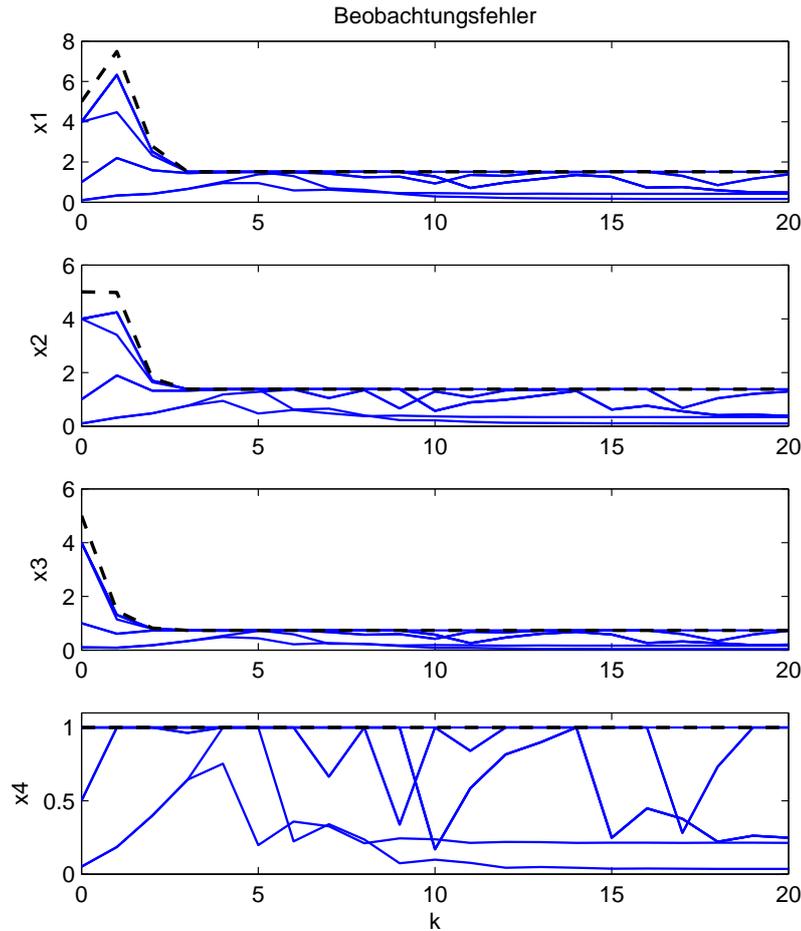


Bild 5.31: Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke bei Beobachtung mit N_3

also insgesamt mit $N_2 = (\mathbf{I}_4, -\mathbf{I}_4, \boldsymbol{\eta}_2, -\boldsymbol{\eta}_2)^T$ erfolgt. Die Beobachtungsfehler für die Zustandsgrößen aus Abb. 5.31 erhält man bei Einschließung in den Richtungen

$$\mathbf{N}_3 = \pm(\mathbf{C}^T, (\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1})^T, (\mathbf{C}\mathbf{A}^{-2})^T, (\mathbf{C}\mathbf{A}^{-3})^T)^T. \quad (5.70)$$

Abb. 5.32 zeigt die zuvor berechneten Fehlerschranken für die einzelnen Zustände und das Beispielsystem (5.67) nochmals im Vergleich, wobei die gestrichelte Linie durch exakte Prädiktion erhalten wurde. Die Wahl der Richtungen (5.70) erweist sich hier als besonders günstig, da man nahezu die Fehlerschranken der Beobachtung mit exakter Prädiktion erreicht. \square

Möglicherweise lassen sich auf ähnlichem Wege Methoden zur numerischen Berechnung oberer Schranken für den Beobachtungsfehler für andere Methoden der Prädiktion und für Systeme mit unsicheren Parametern ableiten.

5.8. Wahl der Einschließungsrichtungen

In diesem Bericht wird vorgeschlagen, für alle Modelle Einschließungsrichtungen fest zu wählen, um den Rechenaufwand konstant zu halten. Auf die Entfernung redundanter

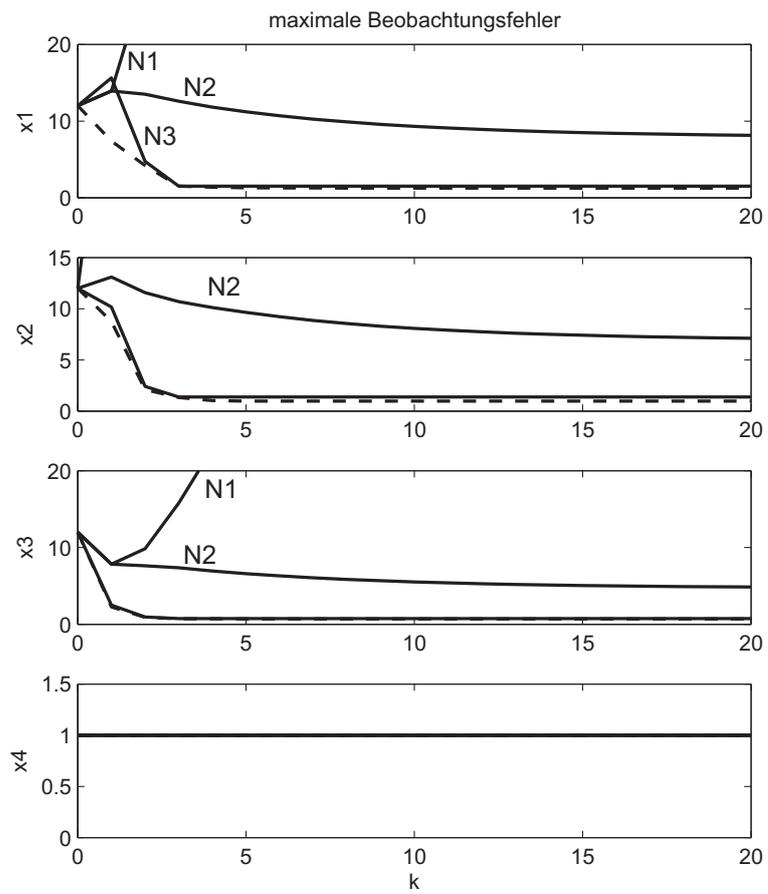


Bild 5.32: Obere Fehlerschranke für verschiedene Beobachtungsverfahren für ein System vierter Ordnung

Ungleichungen kann außerdem verzichtet werden. Die Entwurfsaufgabe besteht in der Wahl der M_p Approximationsrichtungen \mathbf{n}_i^T , welche als Zeilen in der Matrix \mathbf{N} des Polytops

$$\mathcal{X}(k) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{N}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(k)\} \supseteq \mathcal{X}^*(k) \quad (5.71)$$

auftreten. Dabei bietet es sich oft an, symmetrische Richtungen $\pm\mathbf{n}_i$ zu verwenden. Durch sorgfältige Analyse des Systems können günstige Einschließungsrichtungen ermittelt werden.

Ausgangspunkt ist die kompakte Formulierung des Polytops im erweiterten Zustands-/Eingangsraum (z.B. $\mathcal{XU}(k)$), welche in der Regel Messinformationen und Eingangsinformationen enthält. Wenn lediglich prädiziert Mengen gesucht werden, dann spielen nur Teile der folgenden Aspekte eine Rolle:

- **Achsenparallel beschränkte Zustandsmenge.** Wählt man als Einschließungsrichtungen zunächst alle $\mathbf{N} = (\mathbf{I}, -\mathbf{I})^T$, dann kann man garantieren, dass als Ergebnis der Beobachtung eine beschränkte Zustandsmenge vorliegt.
- **Messung.** Liegt durch Messungen zumeist präzise Informationen vor, so sollte eine Überapproximation in Richtung des Messpolyeders $\mathbf{N} = \pm\mathbf{C}$ vorgenommen werden.
- **Messpropagation.** Nach Abschn. 5.5 propagiert die Messinformation mit der Zeit im Zustandsraum weshalb $\mathbf{N} = \pm\mathbf{C}\mathbf{A}^{-k}$ vorliegen können.
- **Eingangsinformationen.** Die mit der Eingangsmatrix \mathbf{B} transformierten Kanten \mathbf{M}_u des Eingangspolytops (2.20) treten nach der Prädiktion im Zustandspolytop auf. So kann es sinnvoll sein, diese und entsprechend abgebildete Richtungen $\mathbf{M}_b\mathbf{A}^{-k}$ zu verwenden.
- **Nominales Modell.** Das Modell \mathcal{M}_0 genügt möglicherweise, um Einschließungsrichtungen basierend auf Ein- und Ausgangsmatrizen festzulegen. Bei unsicheren Parametern in der Zustandsübergangsmatrix müssen diese Richtungen nicht exakt als Kanten des Polytops vorliegen, stellen aber eventuell eine gute Näherung dar.
- **Simulation.** Durch exakte Simulation des Modells kann festgestellt werden, welche Richtungen tatsächlich in den Zustandspolytopen auftreten und in welchem Ausmaß. Mit den gewählten Einschließungsrichtungen kann durch Simulation überprüft werden, ob die getroffene Wahl sinnvoll war.
- **Strukturierte Beschreibung.** Für unsichere Parameter gibt es hier die Möglichkeit, dass bestimmte Einschließungsrichtungen mit geringem Rechenaufwand ermittelt werden können. Außerdem kann das Modell auf feste Richtungen untersucht werden, in denen keine Verschiebung mit \mathbf{p} stattfindet.

6. Verzögerte Beobachtung und E/A-Einschließung (Störgrößeneinschließung)

6.1. Ziel der verzögerten Beobachtung und E/A-Einschließung

Störgrößenbeobachtung. In diesem Abschnitt wird die Zustandsmengenbeobachtung zur Störgrößenbeobachtung erweitert, indem E/A-Einschließungen berechnet werden. Für die Störung $\mathbf{d}_1(k)$ aus Abb. 1.1 wird angenommen, dass sie beschränkt ist, aber dass weitere Eigenschaften der Dynamik nicht bekannt sind. Die Schranken können sehr große Intervalle darstellen und aus physikalischen Grenzen stammen. Das Monitoring des tatsächlichen Verlaufs einer solchen, nicht messbaren Eingangsgröße ist häufig von Interesse.

Zum aktuellen Zeitpunkt k enthalten die Messwerte keine Informationen über die Amplitude der Störung $\mathbf{d}_1(k)$, wenn nicht der spezielle Fall eines Stördurchgriffs vorliegt. Es kann aber mit zeitlicher Verzögerung k'_v auf die Störung geschlossen werden. Das Ziel der Störgrößenbeobachtung ist die Ermittlung einer Menge $\mathcal{D}(k - k'_v|k)$ unter der Kenntnis der Messwerte \mathbf{u}_m und \mathbf{y}_m bis zum Zeitpunkt k , die den wahren Wert $\mathbf{d}_1(k - k'_v)$ garantiert enthält. Mit der Menge $\mathcal{D}^*(k - k'_v|k) \subseteq \mathcal{D}(k - k'_v|k)$ wird die exakte Menge aller Störungen bezeichnet, die zu den vorliegenden Messungen und dem Modell konsistent sind. Überapproximationen müssen zu Gunsten der Realisierbarkeit des Verfahrens durchgeführt werden.

Allgemeiner können verbesserte Einschließungen

$$\mathcal{U}(k - k'_v|k) \supseteq \mathcal{U}^*(k - k'_v|k) \subseteq \mathcal{U}^*(k - k'_v) \quad (6.1)$$

von mit beschränkter Genauigkeit messbaren Eingangssignalen mit entsprechender Verzögerung ermittelt werden. Auch wenn dieser Fall weniger relevant ist, sollen Eingangssignale trotzdem im Folgenden wieder in der Form $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}^T, \mathbf{d}^T)^T$ aufgeschrieben, wobei die Eingangsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aus (2.27) entsteht. Das Vorgehen ist der Tatsache geschuldet, dass aus Sicht des Zustandsmengenbeobachters Störungen und Eingänge äquivalent gehandhabt werden und der Anwender des Verfahrens entscheiden muss, für welche Eingänge letztendlich Einschließungen zu ermitteln sind.

Verzögerte Beobachtung. Der Weg zu einer verzögerten Signalbeobachtung führt letztlich auf eine verzögerte Zustandsbeobachtung. Durch zusätzliche Messinformationen kann die Menge der Zustände zum Zeitpunkt $k + k_v$ möglicherweise besser bestimmt werden als zum Zeitpunkt k . Deshalb sind klassische Beobachter für unbekannte Eingangssignale ebenfalls verzögerte Beobachter. Dieses Konzept wird hier im Sinne der garantierten Mengenbeobachtung erweitert. Wie der folgende Abschnitt zeigt, kann ein um $k_v \geq 0$ Zeitschritte verzögerter Beobachter eingesetzt werden, um eine Eingangseinschließung um $k'_v = k_v + 1$ Zeitschritte verzögert zu ermitteln.

Liegen in einem Prozess Messungen mit großen Unsicherheiten vor, so kann im Einzelfall eine verbesserte, verzögerte Messung

$$\mathcal{Y}(k - k'_v|k) \supseteq \mathcal{Y}^*(k - k'_v|k) \subseteq \mathcal{Y}^*(k - k'_v) \quad (6.2)$$

angegeben werden. Durch Abbildung der verzögerten Beobachtung in den Ausgangsraum ist das dann möglich, wenn diese Beobachtung durch Informationen präziser

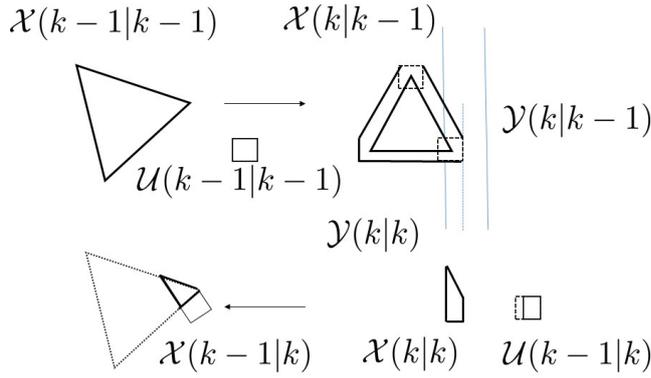


Bild 6.1: Prinzip der E/A-Einschließung

Eingangsmessungen und Modelleigenschaften und evtl. anderer Ausgangsmessungen erzielt wurde. Die Überlegungen des folgenden Abschnitts zeigen, dass das prinzipiell bereits bei Zustandsmengenbeobachtung ohne Verzögerung möglich ist.

Offline Analyse. Wird die verzögerte Beobachtung schrittweise durchgeführt, dann gehört zu diesen Schritten auch eine Prädiktion mit dem inversen Modell, also entgegen der Zeitachse, um Zustandseinschließungen in der Vergangenheit zu berechnen. So kann man die Methoden auch offline einsetzen, um formal wie folgt geschriebene Einschließungen zu ermitteln, wenn Messwerte bis zum Zeitpunkt $k + k_b$ vorliegen:

$$\mathcal{X}(k \mid 0 \dots k + k_b) \supseteq \mathcal{X}^*(k \mid 0 \dots k + k_b) \subseteq \mathcal{X}^*(k) \quad (6.3)$$

$$\mathcal{U}(k \mid 0 \dots k + k_b) \supseteq \mathcal{U}^*(k \mid 0 \dots k + k_b) \subseteq \mathcal{U}^*(k) \quad (6.4)$$

$$\mathcal{Y}(k \mid 0 \dots k + k_b) \supseteq \mathcal{Y}^*(k \mid 0 \dots k + k_b) \subseteq \mathcal{Y}^*(k) \quad (6.5)$$

6.2. E/A-Einschließung bei Zustandsmengenbeobachtung

Prinzip der E/A-Einschließung. Die folgenden prinzipiellen Überlegungen zeigen, wie für Systeme ohne Durchgriff die aktuelle Messinformation bereits die um $k'_v = 1$ verzögerte Einschließung des Eingangs verbessern kann. Wie Abb. 6.1 verdeutlicht, entsteht zunächst aus der Prädiktion die Menge $\mathcal{X}(k|k-1)$. Sie entsteht aus der Minkowski-Summe der transformierten Zustandsmenge und dem Eingangspolytop $\mathcal{U}(k-1|k-1)$. Die Messung zum Zeitpunkt k sei hier mit $\mathcal{Y}(k|k-1)$ bezeichnet und stellt sich im Zustandsraum als Polyeder (breiter vertikaler Streifen) dar. In diesem Fall schneidet das Messpolyeder die prädizierte Menge so grenzwertig, dass die sehr kleine Zustandsmenge $\mathcal{X}(k|k)$ beobachtet werden kann. Man erhält durch Abbildung in den Ausgangsraum den schmaleren Streifen $\mathcal{Y}(k|k)$ und kann so die Einschließung des Ausgangssignals verbessern. Allerdings tritt der Fall genau dann auf, wenn Messung oder Prädiktion entsprechend widersprüchlich, also messfehlerbehaftet sind. Außerdem erkennt man, dass $\mathcal{U}(k-1|k) \subset \mathcal{U}(k-1|k-1)$, da ein kleiner Bereich des Eingangssignals nicht aufgetreten sein kann. Transformiert man die korrigierte Zustandsmenge $\mathcal{X}(k|k)$ zurück, dann erhält man $\mathcal{X}(k-1|k) \subset \mathcal{X}(k-1|k-1)$, die verbesserte Zustandseinschließung

mit Verzögerung $k_v = 1$. Auf diesen letzten Schritt wird bei der gewöhnlichen Zustandsmengenbeobachtung verzichtet. Diese Transformation ist eine 'Prädiktion' auf der Basis des inversen Systems und wird erst in Abschn. 6.4 durchgeführt. Hier soll aber die Möglichkeit verdeutlicht werden, durch verzögerte Beobachtung verbesserte Zustandseinschließungen zu berechnen.

Störgrößen- und Zustandsmengenbeobachtung. Jetzt wird für LDTI-Systeme auf der Basis der bisherigen Beobachtung ($k_v = 0$) das exakte Eingangspolytop formuliert. Für die mindestens notwendige Verzögerung $k'_v = 1$ ist es wie folgt gegeben:

$$\mathcal{U}^*(k-1|k) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(k-1) \mid \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{X}_m(k), \mathbf{x}' \in \mathcal{X}^*(k-1)\} \quad (6.6)$$

$$= \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(k-1) \mid \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{u}) \in \mathcal{X}^*(k-1), \mathbf{x} \in \mathcal{X}_m(k)\}. \quad (6.7)$$

Ein Vergleich mit Gl. (5.16) zeigt, dass die Forderungen (6.7) bereits als Polytop (5.17) formuliert wurden. Deshalb führt die Projektion

$$\mathcal{U}^*(k-1|k) = Proj_{\mathcal{U}} \mathcal{P}(k) \quad (6.8)$$

auf den Eingangssignalraum auf eine Einschließung des Eingangsvektors $\mathbf{u}(k-1)$ unter Berücksichtigung der aktuellen Messgröße $\mathbf{y}_m(k)$. Die minimale Störgrößeneinschließung ergibt sich demnach aus

$$\mathcal{D}^*(k-1|k) = Proj_{\mathcal{D}} \mathcal{P}(k) = Proj_{\mathcal{D}} \mathcal{U}^*(k-1|k).$$

Die Berechnung der Menge (6.8) ist nur dann sinnvoll, wenn eine verbesserte Einschließung $\mathcal{U}^*(k-1|k) \subset \mathcal{U}(k-1)$ erzielt wird. Eine notwendige Bedingung dafür ist $\mathbf{CB} \neq \mathbf{0}$. Dies erkennt man aus der Definition des Messpolytops (2.22), (2.23) und

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{X}_m(k) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \end{pmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \leq \mathbf{b}_m(k). \quad (6.9)$$

Speziell für die Störgrößenbeobachtung folgt mit $\mathbf{CE} = \mathbf{0}$, dass Gl. (6.9) sowie die rechte Seite von Gl. (6.6) unabhängig von \mathbf{d} ist, was auf $\mathcal{D}^*(k-1|k) = \mathcal{D}^*(k-1)$ führt, weshalb für $k'_v = 1$ keine sinnvolle Störgrößeneinschließung durchführbar ist.

6.3. Kompakte verzögerte Beobachtung (für LDTI-Systeme)

In Erweiterung des Ansatzes aus Abschn. 6.2 werden jetzt Gleichungen für verzögerte Eingangsmengen angegeben, was auf den Algorithmus zur rekursiven Ermittlung verzögerter Zustandsmengen führt. Das mit $k'_v = 2$ verzögerte, exakte Eingangspolytop

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*(k-2|k) &:= \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(k-2) \mid \\ &\quad \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{u}) \in \mathcal{X}^*(k-2), \mathbf{x} \in \mathcal{X}_m(k-1), \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}' \in \mathcal{X}_m(k), \mathbf{u}' \in \mathcal{U}(k-1)\} \\ &\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \mathbf{M}(k-2)\mathbf{A}^{-1} \leq \mathbf{b}(k-2), \quad \quad \quad \mathbf{M}_m(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}') \leq \mathbf{b}_m(k) \\ &\quad \quad \quad \mathbf{M}_m\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_m(k-1), \quad \quad \quad \mathbf{M}_u\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_u(k-1) \end{aligned}$$

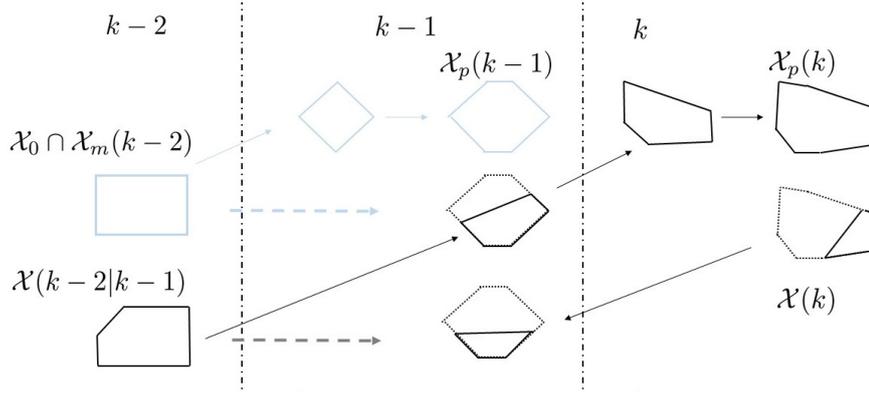


Bild 6.2: Prinzip der verzögerten E/A-Beobachtung

wird im erweiterten Zustands-/Eingangsraum formuliert mit

$$\mathcal{P}(k-1) := \{ \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T(k-1), \mathbf{u}^T(k-1), \mathbf{u}^T(k-2))^T \mid \quad (6.10)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{M}_m \mathbf{A} & \mathbf{M}_m \mathbf{B} & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_u & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{M}(k-2)\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} & -\mathbf{M}(k-2)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_u & \\ \mathbf{M}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{array} \right) \mathbf{x} \leq \left. \left(\begin{array}{c} \mathbf{b}_m(k) \\ \mathbf{b}_u(k-1) \\ \mathbf{b}(k-2) \\ \mathbf{b}_u(k-2) \\ \mathbf{b}_m(k-1) \end{array} \right) \right\},$$

und $\mathbf{M}_m = \mathbf{M}_y \mathbf{C}$ sowie

$$\mathcal{U}^*(k-2|2) = Proj_{\mathcal{U}(k-2)} \mathcal{P}(k-1).$$

Die Bildung des Polytop $\mathcal{P}(k-1)$ stellt in Kombination mit der Projektion

$$\mathcal{X}^*(k-1|k) = Proj_{\mathcal{X}(k-1)} \mathcal{P}(k-1) \quad (6.11)$$

$$= \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{M}(k-1)\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(k-1) \} \quad (6.12)$$

eine mit $k_v = 1$ verzögerte Beobachtung dar, welche durch den unteren Teil des Ungleichungssystems (6.7) gegeben ist. Die oberen Zeilen formulieren den zusätzlichen Einfluss der letzten Messung $\mathbf{y}_m(k)$. Die Auswertung von Gl. (6.11) ist für die rekursive Bildung des Polytops (6.10) und damit für die Stör- und Eingangsgrößenbeobachtung notwendig. Abb. 6.2 zeigt die relevanten Zustandsmengen für diesen Fall. Mit $\mathcal{P}(k-1)$ wird das Polytop in der Mitte für die Rekursion ermittelt. Von dort aus betrachtet wird ein Schritt in die Zukunft gemacht, um aktuelle Messwerte zu berücksichtigen.

In Verallgemeinerung von Gl. (6.6) kann für beliebige Verzögerungen k'_v die minimale Eingangsmenge

$$\mathcal{U}^*(k-k'_v|k) := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{U}_m(k-k'_v) \mid \quad (6.13)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{X}_m(k-k'_v+1), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}^*(k-k'_v),$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u}' \in \mathcal{X}_m(k-k'_v+2), \quad \mathbf{u}' \in \mathcal{U}(k-k'_v+1),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}^{k'_v}\mathbf{x} + \mathbf{A}^{k'_v-1}\mathbf{B}\mathbf{u} + \dots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(k'_v-2)}$$

$$+ \mathbf{B}\mathbf{u}^{(k'_v-1)} \in \mathcal{X}_m(k), \quad \mathbf{u}^{(k'_v-1)} \in \mathcal{U}(k-1) \}$$

definiert werden unter Kenntnis des Vorgängerpolytops $\mathcal{X}^*(k - k'_v)$ und der Messungen bis zum Zeitpunkt k . Analog zu Gl. (6.7) kann der Ausdruck (6.13) wie folgt umgeformt werden,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*(k - k'_v | k) := \{ & \mathbf{u} \in \mathcal{U}_m(k - k'_v) \mid \\ & \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{B}\mathbf{u}) \in \mathcal{X}^*(k - k'_v), \quad \mathbf{x}' \in \mathcal{X}_m(k - k'_v + 1), \\ & \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u}' \in \mathcal{X}_m(k - k'_v + 2), \quad \mathbf{u}' \in \mathcal{U}(k - k'_v + 1), \\ & \mathbf{A}^2\mathbf{x}' + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}' + \mathbf{B}\mathbf{u}'' \in \mathcal{X}_m(k - k'_v + 3), \quad \mathbf{u}'' \in \mathcal{U}(k - k'_v + 2), \\ & \vdots \\ & \mathbf{A}^{k'_v-1}\mathbf{x}' + \mathbf{A}^{k'_v-2}\mathbf{B}\mathbf{u}' + \dots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(k'_v-2)} \\ & \quad + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(k'_v-1)} \in \mathcal{X}_m(k), \mathbf{u}^{(k'_v-1)} \in \mathcal{U}(k - 1)\}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

wobei \mathbf{x}' den Zustand zum Zeitpunkt $k - k'_v + 1$ bezeichnet. Die rekursive Berechnung der Menge (6.14) beinhaltet deshalb eine um $k'_v - 1$ Zeitschritte verzögerte Beobachtung. Die Menge der Zustände, welche mit den Messungen bis zur Zeit k konsistent sind, lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^*(k - k_v | k) := \{ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}_m(k - k_v) \mid \\ & \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{u}) \in \mathcal{X}^*(k - k_v - 1), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}(k - k_v - 1), \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}' \in \mathcal{X}_m(k - k_v + 1), \quad \mathbf{u}' \in \mathcal{U}(k - k_v), \\ & \mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}' + \mathbf{B}\mathbf{u}'' \in \mathcal{X}_m(k - k_v + 2), \quad \mathbf{u}'' \in \mathcal{U}(k - k_v + 1) \\ & \vdots \\ & \mathbf{A}^{k_v}\mathbf{x} + \mathbf{A}^{k_v-1}\mathbf{B}\mathbf{u} + \dots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(k_v-1)} \\ & \quad + \mathbf{B}\mathbf{u}^{k_v} \in \mathcal{X}_m(k), \mathbf{u}^{k_v} \in \mathcal{U}(k - 1)\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Setzt man in Gl. (6.15) $k_v = k'_v - 1$, erhält man zu (6.14) identische Forderungen, welche sich als Polytop im erweiterten Zustands-/Eingangsraum formulieren lassen:

$$\mathcal{P}(k - k_v) := \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P}\mathbf{x} \leq \mathbf{v} \} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cccccc} M_m \mathbf{A}^{k_v} & M_m \mathbf{A}^{k_v-1} \mathbf{B} & \dots & M_m \mathbf{A} \mathbf{B} & M_m \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ M_m \mathbf{A}^{k_v-1} & M_m \mathbf{A}^{k_v-2} \mathbf{B} & \dots & M_m \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ M_m \mathbf{A} & M_m \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_u & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & M_u & \mathbf{0} \\ \hline M(k - k'_v) \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -M(k - k'_v) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_u \\ M_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k - k_v) \\ \mathbf{u}(k - k_v) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k - 2) \\ \mathbf{u}(k - 1) \\ \mathbf{u}(k - k_v - 1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_m(k) \\ \mathbf{b}_m(k - 1) \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m(k - k_v + 1) \\ \mathbf{b}_u(k - k_v) \\ \vdots \\ \mathbf{b}_u(k - 1) \\ \hline \mathbf{b}(k - k_v - 1) \\ \mathbf{b}_u(k - k_v - 1) \\ \mathbf{b}_m(k - k_v) \end{pmatrix}.$$

Die rekursive Ermittlung der verzögerten Zustandsmenge erfolgt durch

$$\mathcal{X}^*(k - k_v | k) = Proj_{\mathcal{X}(k - k_v)} \mathcal{P}(k - k_v) \longrightarrow \mathbf{M}(k - k_v), \mathbf{b}(k - k_v) \quad (6.17)$$

und ermöglicht damit durch die Projektionen

$$\mathcal{U}^*(k - k_v - 1 | k) = Proj_{\mathcal{U}(k - k_v - 1)} \mathcal{P}(k - k_v) \quad (6.18)$$

die Berechnung von Einschließungen aller um $k'_v = k_v + 1$ verzögerten Eingangs- und Störgrößen.

Die verzögerte Zustandsmengenbeobachtung erfordert im Allgemeinen zur Begrenzung der algorithmischen Komplexität die Berechnung einer Überapproximation der Menge (6.17)

$$\mathcal{X}(k - k_v | k) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{N}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}(k)\} \supseteq \mathcal{X}^*(k - k_v | k), \quad (6.19)$$

wobei die Elemente von $\mathbf{b}(k)$ durch

$$b_i(k) = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}(k - k_v)} (\tilde{\mathbf{n}}_i^T \cdot \mathbf{p}) \quad (6.20)$$

gegeben sind. Darin stellen die Richtungsvektoren $\tilde{\mathbf{n}}_i^T$ als Zeilen der Matrix $\mathbf{N} = (\mathbf{N} \mathbf{0} \dots \mathbf{0})$ die auf den Zustands-/Eingangsraum erweiterten Ebenen im Zustandsraum dar, welche das Polytop (6.19) begrenzen. Da in der Regel nur elementweise Schranken der Eingangssignale von Interesse sind, kann die Projektion (6.18) durch die Lösung linearer Programme ersetzt werden. Die Einschließung $\mathcal{U}(k - k_v - 1 | k)$ nach Gl. (2.26) ist dann mit

$$b_{u,i}(k) = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}(k - k_v)} (\mathbf{e}_{u,i}^T \cdot \mathbf{p}) \quad (6.21)$$

gegeben, wobei die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{u,i}$ den Eingangsraum aufspannen.

Die Entwurfsfreiheit des Algorithmus 4 zur Störgrößenbeobachtung besteht in der Wahl Verzögerung k_v . Des Weiteren ist die Frage nach der Notwendigkeit einer Überapproximation zu beantworten, wofür günstige Einschließungsrichtungen \mathbf{N} festzulegen sind.

Eigenschaften der Eingangs- und Störgrößenbeobachtung. Analog zur Zustandsmengenbeobachtung werden bei Verwendung des Projektionsoperators (4.26) exakte Mengen \mathcal{X}^* konsistenter Zustände \mathcal{U}^* konsistenter Eingangswerte berechnet, wobei die Eigenschaft bei der ersten Überapproximation verloren geht. Außerdem stellt die Annahme beschränkter Störungen und die Beobachtbarkeit von (\mathbf{A}, \mathbf{C}) sicher, dass die Folge von Zustandsmengen beschränkt ist [Pla06]. Des Weiteren gilt:

Algorithmus 4 Kompakte verzögerte Zustandsmengenbeobachtung, E/A- und Störgrößeneinschließung für LDTI-Systeme

Gegeben:

- Prozessmodell $\mathcal{M} = \{LDTI_{ABC}, \mathcal{D} - LDTI, [e]_u, [e]_y\}$ (inklusive Störschranken $\Delta\bar{\mathbf{d}}, \Delta\mathbf{d}$)
- Messwertfolgen $\{\mathbf{u}(0 \dots k_b), \mathbf{y}(0 \dots k_b)\}$ (1.3), (1.4)
- Verzögerung k'_v , Approximationsrichtungen \mathbf{N}
- Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0

Initialisierung:

$$k_v = k'_v - 1, \quad k = k_v + 1$$

$$\mathcal{X}(0|k_v) = \mathcal{X}_0 \cap Proj_{\mathcal{X}} \mathcal{P}(0) \text{ mit } \mathcal{X}(-1) = \mathbb{R}^n$$

Wiederhole für alle $k \leq k_b$

1. Bildung des Polytops (6.16) mit $\mathcal{X}(k - k_v - 1|k - 1)$
2. Berechnung der Projektion (6.17) oder des Polytops (6.19). Speichern von $\mathbf{M}(k - k_v), \mathbf{b}(k - k_v)$
3. Berechnung der Stör/Eingangsgrößeneinschließung durch die Projektion (6.18) oder Auswertung von (6.21), evtl. Ausgangseinschließung durch Überapproximation mit $\pm \mathbf{n}_i^T = \pm \mathbf{c}_i^T$.
4. $k = k + 1$

Ende Wiederhole

Ergebnis:

- Mengen $\mathcal{X}(k - k_v|k), \mathcal{U}(k - k'_v|k)$ ($\mathcal{D}(k - k'_v|k)$), $\mathcal{Y}(k - k_v|k)$ für $k \in \{k_v, \dots, k_b\}$
-

Theorem 4 (Garantierte Einschließung)

Algorithmus 4 ermittelt garantierte E/A- und Störgrößeneinschließung:

$$\mathbf{u}(k - k'_v|k) \in \mathcal{U}^*(k - k'_v|k) \subseteq \mathcal{U}(k - k'_v|k) \quad \forall k, k'_v.$$

Beweis 1

Mit der Verankerung $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0^*$ und dem Induktionsschritt $\mathcal{X}(k - k_v|k) \supseteq \mathcal{X}^*(k - k_v|k) \Rightarrow \mathcal{X}(k - k_v + 1|k + 1) \supseteq \mathcal{X}^*(k - k_v + 1|k + 1) \quad \forall k_v$ aus der Berechnung von (6.19) mit (6.20) folgt die Vollständigkeit der verzögerten Beobachtung: $\mathbf{x}(k - k_v) \in \mathcal{X}^*(k - k_v|k) \subseteq \mathcal{X}(k - k_v|k) \quad \forall k, k_v$. Die Überapproximation (6.21) bei der Ermittlung der Einschließung stellt dann die Eigenschaft der garantierten Einschließung sicher.

□

Theorem 5 (Monotonie der Beobachter)

Für die aus Algorithmus 4 resultierenden Mengen mit unterschiedlicher Verzögerung k'_v gilt bei fester Überapproximation mit \mathbf{N}

$$\mathcal{U}(k|k + k'_v + 1) \subseteq \mathcal{U}(k|k + k'_v) \quad \forall k, k'_v.$$

Beweis 2

Aus der Definition (6.15) folgt direkt $\mathcal{X}^*(k|k + k_v + 1) \subseteq \mathcal{X}^*(k|k + k_v)$ für minimale Zustandsmengen. Die Überapproximation (6.19), (6.20) mit festem \mathbf{N} hat die Eigenschaft $\mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathbf{N}\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2$. Damit bleibt durch Induktion die Beziehung $\mathcal{X}(k|k + k'_v + 1) \subseteq \mathcal{X}(k|k + k'_v)$ für alle k erhalten und aus (2.26), (6.21) folgt Theorem

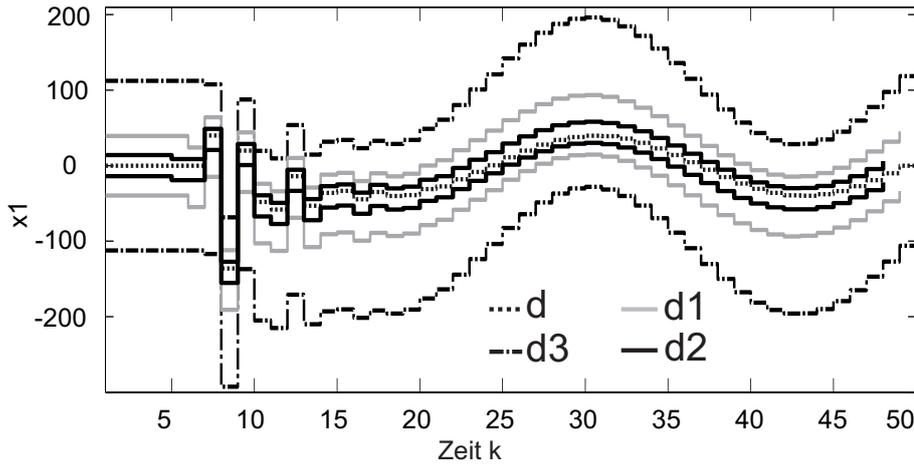


Bild 6.3: Wahrer Systemzustand $x_1^*(k)$ und exakte Zustandseinschließungen für die Verzögerungen $k_v \in \{0, 1, 2\}$

5. □

Der relative Grad des Systems (2.1) bzgl. des betrachteten Eingangs ist die kleinste ganze Zahl $r_d > 0$, für die gilt $\mathbf{C}\mathbf{A}^{r_d-1}\mathbf{B} \neq 0$.

Theorem 6 (Beobachtbarkeit von Eingangs- und Störgrößen)

Für den Beobachter nach Algorithmus 4 mit Verzögerung $k'_v < r_d$ gilt

$$\mathcal{U}(k - k'_v | k) = \mathcal{U}(k - k'_v).$$

Beweis 3

Aus der Menge der Eingangssignale in der Darstellung (6.13) mit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^T, \mathbf{d}^T)^T$ folgt mit der Umformung $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_m(k) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_m$, dass mit $\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} = 0 \forall k \in \{0, \dots, k'_v\}$ alle vom Eingang abhängigen Terme verschwinden. Daraus folgt direkt Theorem 6. □

Der relative Grad r_d gibt die Mindestverzögerung an, die nach Theorem 6 für eine verbesserte Stör- und Eingangsgrößeneinschließung notwendig ist. Die Wahl einer größeren Verzögerung kann das Beobachtungsergebnis nur verbessern, wobei ein höherer Rechenaufwand in Kauf zu nehmen ist.

Beispiel 6.1: Numerisches Beispiel

Betrachtet wird das System (2.1) mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,5 & 3,4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad (6.22)$$

$|u(k) - u_m(k)| < 0,2$ und $|y(k) - y_m(k)| < 0,5$. Es wird die Annahme getroffen, dass die Störung mit $|d(k)| < 100$ beschränkt ist. Abb. 6.3 zeigt

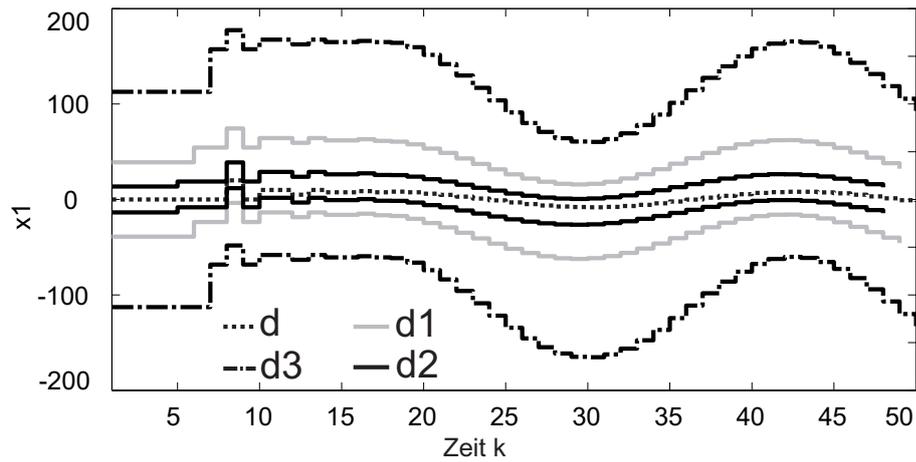


Bild 6.4: Wahrer Systemzustand $x_2^*(k)$ und exakte Zustandseinschließungen für die Verzögerungen $k_v \in \{0, 1, 2\}$

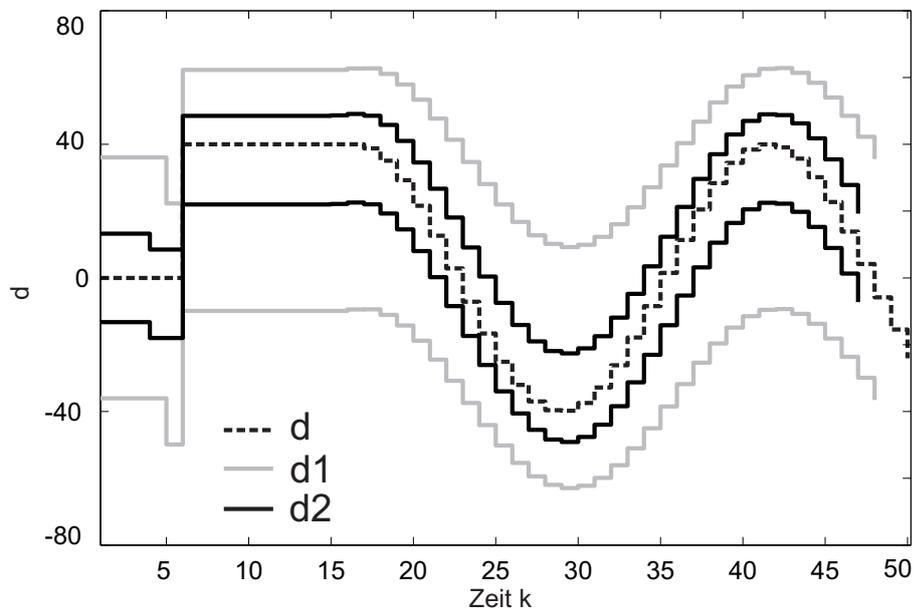


Bild 6.5: Wahre Störgröße $d^*(k)$ und mit der Verzögerung $k'_v = 2$ bzw. $k'_v = 3$ berechnete Einschließung

exemplarisch die mit dem Algorithmus 4 berechnete, exakte Zustandseinschließung für $x_2(k)$. Die mit $k_v = 0$ unverzögerte Beobachtung nach Algorithmus 2 führt auf sehr große Intervalle, während die verzögerte Beobachtung mit $k_v \in \{1, 2\}$ deutlich bessere Einschließungen liefert. Die wahre Zustandsgröße $x_1(k)$ wird immer von den berechneten Intervallen eingeschlossen, wobei mit der größten Verzögerung $k_v = 2$ auch die beste Einschließung gelingt. Die mit Algorithmus 4 ebenfalls berechneten, minimalen Einschließungen der skalaren Störung werden in Abb. 6.5 gezeigt und entsprechen den Verzögerungen von $k'_v = 2$ bzw. $k'_v = 3$ Zeitschritten. Eine weitere Verzögerung von $k'_v = 4$ bringt nur eine minimale zusätzliche Verbesserung der Einschließung und wird hier nicht gezeigt. \square

Tabelle 6.1: Physikalische Parameter des Gleichstrommotors

Parameter	Symbol und Wert	Maßeinheit
Widerstand der Wicklung	$R = 9$	Ω
Induktivität der Wicklung	$L = 0,11$	H
Motorkonstante	$k_M = 5$	$\frac{\text{Vs}}{\text{rad}}$
Motorkonstante	$k_R = 0,1$	Nms
Motorkonstante	$k_T = 1$	$\frac{\text{Nm}}{\text{A}}$
Trägheitsmoment	$J = 0,1$	Nms^2

Bewertung. Die Qualität der erzielbaren Störgrößeneinschließung hängt von der Struktur und den Parametern des Systems ab. Es wird hier gezeigt, dass eine verzögerte Beobachtung zu einer Verbesserung der Zustands- und Störgrößeneinschließung führen kann. Die Annahme eines beschränkten Störeingangssignals bedeutet implizit, dass die Störung jeweils für genau die Dauer T_s der Abtastzeit konstant ist und zu den Zeitpunkten kT_s beliebig variieren kann. Da hochfrequente Störsignale sich häufig nicht auf den Systemausgang auswirken, kann oft keine gute Einschließung der Störgröße erzielt werden. Eine Verbesserung kann dann erzielt werden, wenn Annahmen über den Verlauf der Störung in Form von Störmodellen getroffen werden können.

Beispiel 6.2: Anwendungsbeispiel: Gleichstrommotor

Im Folgenden wird ein einfaches Modell eines Gleichstrommotors betrachtet, dessen Zustandsvektor $\mathbf{x} = (i, \omega)^T$ sich aus dem Ankerstrom und der Winkelgeschwindigkeit zusammensetzt. Das Ziel der eingesetzten Regelung ist es, die Geschwindigkeit ω auf einem Sollwert zu führen, wobei variable Lastmomente auftreten. Dazu gibt der PI-Regler die Motorspannung $u_m(t)$ vor, wobei die tatsächlich anliegende Spannung $u(t)$ maximal um $|u(t) - u_m(t)| < 1\text{Volt}$ von $u_m(t)$ abweicht. Die Messungenauigkeit der Winkelgeschwindigkeit $y(t) = \omega(t)$ ist durch $|y(t) - y_m(t)| < 0,5\text{rad/s}$ beschränkt. Ein unbekanntes Lastmoment wirkt als Störung $M_L(t) = d(t)$ mit der Beschränkung $|d(t)| < 100\text{N/m}$.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_c u(t) + \mathbf{e}_c d(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_M}{L} \\ \frac{k_T}{J} & -\frac{k_R}{J} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_c^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die verwendeten physikalischen Parameter werden in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Durch Abtastung des kontinuierlichen Modells mit $T_s = 0,02\text{s}$ erhält man

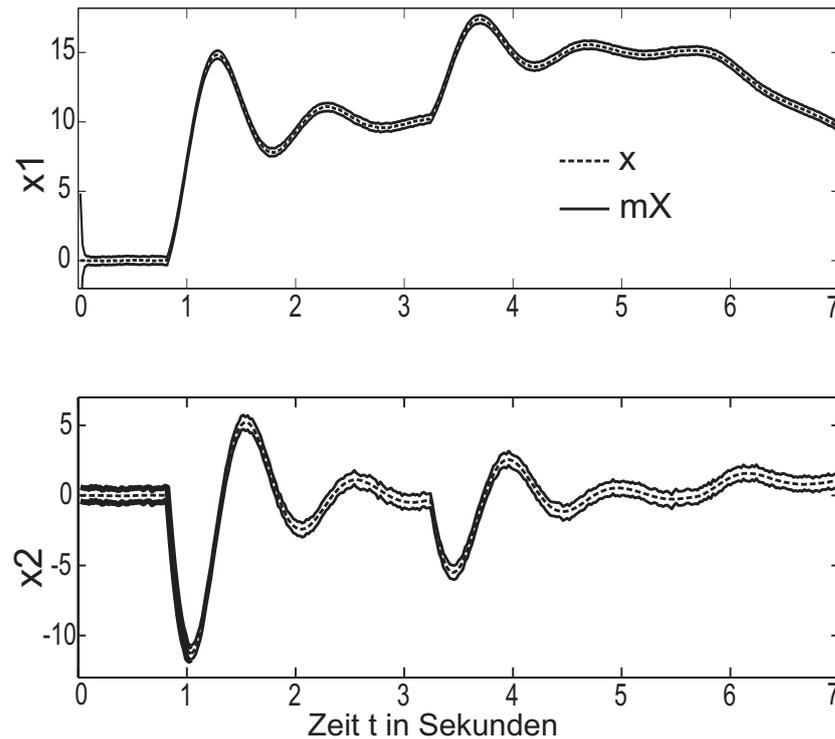


Bild 6.6: Wahrer Systemzustand $\mathbf{x}^*(t)$ und minimale Zustandseinschließung mit $k_v = 0$

die zeitdiskrete Beschreibung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 0,163 & -0,429 \\ 0,094 & 0,925 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0,087 \\ 0,011 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} 0,055 \\ -0,194 \end{pmatrix} d(k) \\ y(k) &= (0 \ 1) \cdot \mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

Abb. 6.6 zeigt die berechneten Zustandseinschließungen für sieben Sekunden, wobei sich das Messrauschen in die ermittelten Intervallgrenzen des gemessenen Zustands $x_2(k)$ überträgt. Das System hat die Eigenschaft, dass der Einfluss der Störung auf die Zustandsmengenbeobachtung gering ist und eine gute Einschließung erzielt wird. Damit kann auch eine gute Einschließung der Störgröße mit dem Algorithmus 4 erreicht werden (Abb. 6.7). Die wahre Störgröße wird hier mit der Verzögerung $k'_v = 1$ und einer Unsicherheit von $\pm 5\text{N/m}$ eingeschlossen.

Sind die Zeitpunkte bekannt, zu denen die sprungförmigen Änderungen des Lastmoments in Abb. 6.7 auftreten, dann kann mit dem Störmodell (2.28) in der Form

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= x_d(k) + \Delta x_d \\ d(k) &= y_d(k) = x_d(k) \end{aligned}$$

die Annahme einer beschränkten Änderungsrate $\Delta x_d = \Delta \bar{x}_d = 0,1$ und absoluter Störschranke $y_d = \bar{y}_d = 100$ getroffen werden. Abb. 6.8 zeigt,

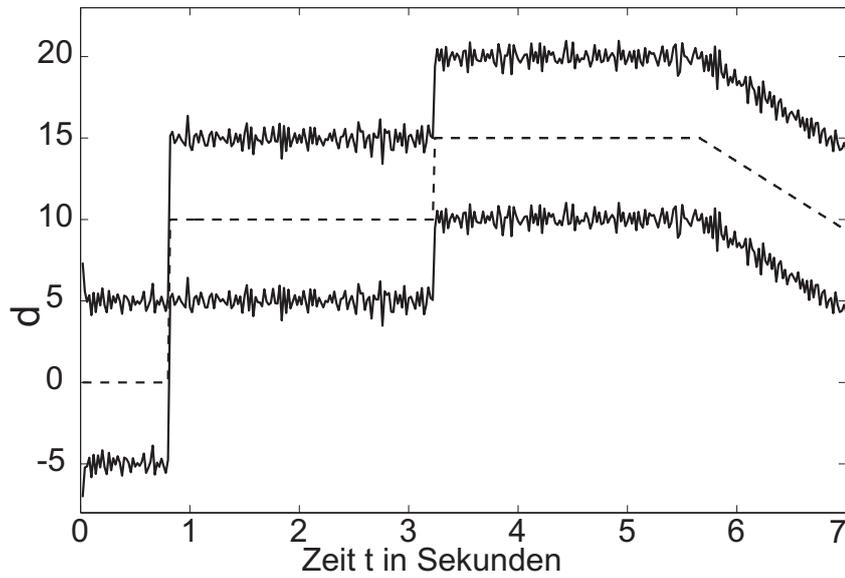


Bild 6.7: Wahre Störgröße $d^*(t)$ und mit der Verzögerung $k'_v = 1$ berechnete Einschließung ohne Störmodell

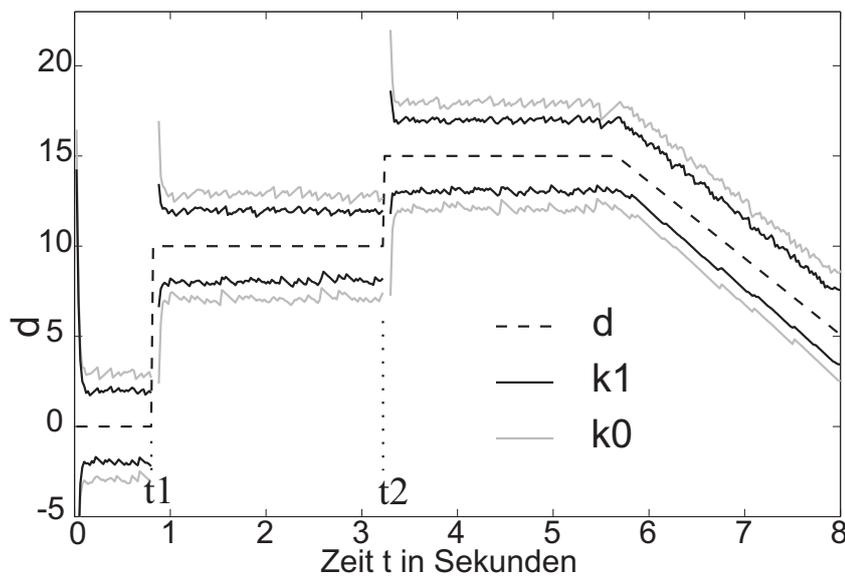


Bild 6.8: Wahre Störgröße $d^*(t)$ und mit Störmodell berechnete Einschließungen für $k_v = 0$ und $k_v = 1$

inversen Modells, wird hier aber kurz inverse Prädiktion genannt. Die Möglichkeit kann auch zur offline-Analyse von Prozessdaten verwendet werden, was in Beispiel 7.1 demonstriert wird.

Um die Abbildungsrichtung deutlich zu machen, bezeichnet $\mathcal{X}^+ = \{\mathbf{x} | \mathbf{M}^+ \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^+\}$ Mengen in der Zukunft (zum Zeitpunkt $k + 1$), aus denen auf die Vergangenheit \mathcal{X}^- geschlossen wird:

$$\mathcal{X}_p^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{u} \in \mathcal{U}(k), \text{ s. d. } \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{X}^+\} \quad (6.25)$$

$$= \{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}^+ - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^+ \in \mathcal{X}^+, \mathbf{u} \in \mathcal{U}(k)\} \quad (6.26)$$

$$= Proj_{\mathbb{R}^n} \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}^+ \mathbf{A} & \mathbf{M}^+ \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{b}_u \end{pmatrix} \right\} \quad (6.27)$$

$$= \mathbf{A}^{-1}(\mathcal{X}^+ \oplus (-\mathbf{B}\mathcal{U}(k))). \quad (6.28)$$

Die Berechnung kann also als Prädiktion mit der Systemgleichung nach (6.26), durch Anwendung eines Projektionsalgorithmus nach Gl. (6.27), oder mit Hilfe der Minkowski-Summe nach Gl. (6.28) erfolgen und entspricht damit der Prädiktion mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$ und $\tilde{\mathbf{B}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Die Abbildung ist in dieser Formulierung exakt (d.h. $\mathcal{X}^{+*} \mapsto \mathcal{X}_p^{-*}$), wie üblich sind Überapproximationen möglich und sinnvoll. Da keine Parameterunsicherheiten vorliegen, ist die Bildmenge (6.25) formal identisch zur so genannten steuerbaren Einschnittmenge [Ker00], wenn alle Eingangssignale nicht als ungenau bekannt, sondern als frei wählbar aus der Menge \mathcal{U} interpretiert werden. Dies gilt nicht für Systeme mit unsicheren Parametern, für welche aber die Polytope \mathcal{P}_j nach Gl. (6.27) mit den Matrizen $[\mathbf{A}_j \mathbf{B}_j]$ gebildet werden können. Man erhält dann eine Überapproximation mit

$$b_i = \max_j \left\{ \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in \mathcal{P}_j} \tilde{\mathbf{n}}_i \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \right\}, \quad (6.29)$$

sodass die Erweiterung zur Berechnung von Überapproximationen für Modelle mit unsicheren Parametern kein Problem darstellt.

Die Abbildung (6.25) stellt allgemein die Umkehrung zur Prädiktion (4.24) dar. Allerdings handelt es sich im Kontext mengenbasierter Abbildungen hier nicht um eine inverse Abbildung. Führt man eine Prädiktion (4.24) $\mathcal{X}^- \mapsto \mathcal{X}_p^+$ durch und berechnet ohne zusätzliche Informationen in \mathcal{X}^+ die Umkehrung (6.25), dann gilt

$$\mathcal{X}_p^+ \mapsto \mathcal{X}_p^- \supseteq \mathcal{X}^-. \quad (6.30)$$

6.4.3. Berechnung von E/A- und Störgrößeneinschließungen

Ergänzt man die gewöhnliche Prädiktion und die in Abschn. 6.4.2 eingeführte inverse Prädiktion jeweils um Messinformationen in der Bildmenge, allgemein gegeben durch die bestmöglichen, erreichten Zustandseinschließungen \mathcal{X}^+ und \mathcal{X}^- , dann kann durch Projektion in den Eingangssignalraum die E/A-Einschließung erfolgen. Man erhält die Darstellungen

$$\mathcal{P}_1 := \left\{ (\mathbf{x}^+, \mathbf{u})^T \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}^- \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{M}^- \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \\ \mathbf{M}^+ & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b}^- \\ \mathbf{b}_u \\ \mathbf{b}^+ \end{pmatrix} \right\} \quad (6.31)$$

und

$$\mathcal{P}_2 := \left\{ (\mathbf{x}^-, \mathbf{u})^T \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m] \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}^+ \mathbf{A} & \mathbf{M}^+ \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_u \\ \mathbf{M}^- & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^- \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{b}_u \\ \mathbf{b}^- \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.32)$$

Liegen die exakten Zustandsmengen \mathcal{X}^{+*} und \mathcal{X}^{-*} , also bezüglich des Beobachtungshorizonts $k_b \geq k$ minimalen Einschließungen vor, dann erhält man auch die exakte Einschließung

$$\mathcal{U}^*(k \mid k_b) = \text{Proj}_{\mathbb{R}^m} \mathcal{P}_{1,2}. \quad (6.33)$$

Beispiel 6.3: A posteriori Berechnung von Zustands-, Eingangs- und Ausgangseinschließungen

Hier wird das System zweiter Ordnung aus Beispiel 5.1 mit einer veränderten Anfangszustandsmenge betrachtet, wie sie in Abb. 6.9, oben links in rot dargestellt und vom schwarzen Polytop größtenteils überlagert ist. Schrittweise werden für $k = \{1 \dots 8\}$ die Zustandsmengen für den nächsten Zeitschritt prädiiziert und in blau dargestellt. Durch die Messungen wird eine verbesserte Einschließung erzielt, welche durch rote Polytope dargestellt wird. Zum Zeitpunkt $k = 8$ wird rückwärts auf die Zustandsmenge für $k = 7$ mit Hilfe von Gl. (6.27) geschlossen, was sukzessive bis $k = 0$ fortgesetzt wird. Die in schwarz dargestellten Zustandspolytope stellen die exakten Zustandsmengen unter den zur Verfügung stehenden Messinformationen dar. Eine deutliche Verbesserung im Vergleich zu den beobachteten Zustandsmengen ist erkennbar, wenn sie auch für den Anfangszustand nur geringfügig ausfällt. Alle Zustandsmengen enthalten zu jedem Zeitpunkt den grün markierten, wahren Zustand \mathbf{x}^* . Eine erneute Beobachtung mit der verbesserten Einschließung des in schwarz dargestellten Polytops als Anfangszustand führt nicht zu einer Verbesserung der Zustandseinschließungen. In Abb. 6.10 wird die Ordnung der ermittelten Zustandspolytope dargestellt. In diesem Fall kann eine exakte Berechnung durchgeführt werden, da auch in inverser Zeitrichtung für $k' \geq 9$, also für die Zeitpunkte $k < 8$ die Ordnung gering bleibt. Abb. 6.11 zeigt, dass sich für die hier angenommenen Unsicherheiten kaum verbesserte Einschließung des ungenau bekannten Eingangssignals ergeben. Die wahren Signale $u^*(k)$ und $y^*(k)$ sind dünn gestrichelt dargestellt. Im Unterschied zu den fett dargestellten, mit Messfehlern behafteten Signalen $u_m(k)$ und $y_m(k)$ werden sie immer von den Schranken in rot eingeschlossen. Bei veränderten Unsicherheiten $\Delta_y = 0.4$ und $\Delta_u = 1$, welche durch die schwarz gestrichelten Einschließungen in Abb. 6.12 gegeben sind, erhält man genauere a posteriori Kenntnis über das wahre Eingangssignal. Da $\mathbf{c}^T \mathbf{b} \neq 0$ gilt, ist prinzipiell bereits für $k'_v = 1$ eine verbesserte Einschließung des ungenau bekannten Eingangssignals möglich, was hier nicht der Fall ist, sondern erst für $k'_v = 3$ gelingt. \square

Beispiel 6.4: Gleichstrommotor mit unsicherem Matrixparameter

Da für das Modell aus Beispiel 6.3 bereits für $k_v = 0$ erfolgreich eine Störgrößeneinschließung berechnet werden konnte, wird nun eine methodische

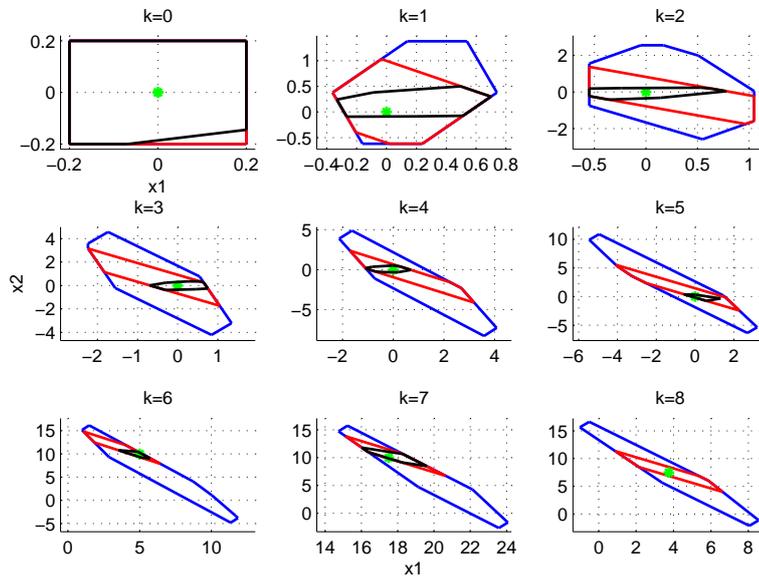


Bild 6.9: Beobachtete und a posteriori-Zustandsmengen eines Systems zweiter Ordnung

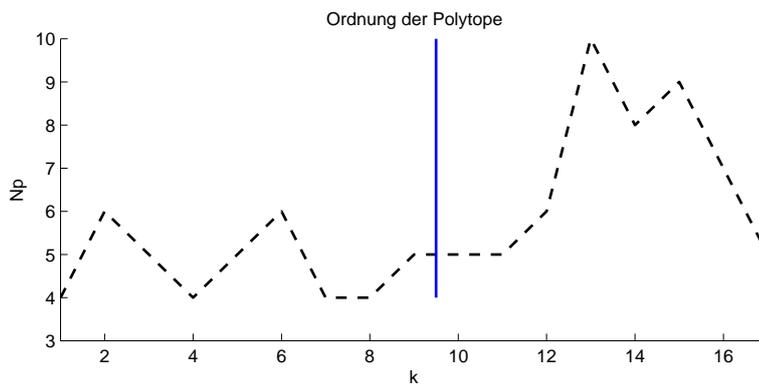


Bild 6.10: Beobachtung eines Systems vierter Ordnung bei unbekanntem Anfangszustand

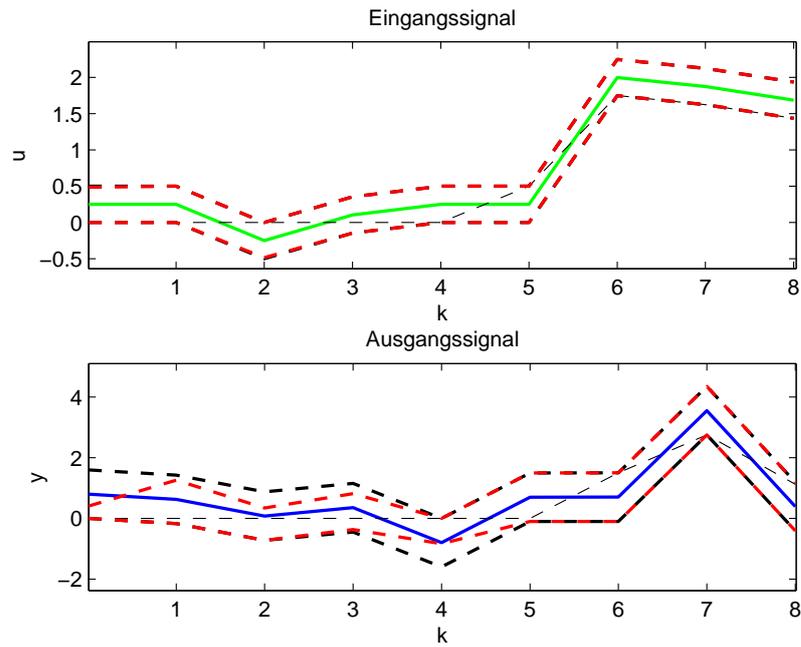


Bild 6.11: Minimale Einschließung von Ein- und Ausgangssignalen nach $k = 9$ Beobachtungsschritten mit $\Delta_y = 0.8$ und $\Delta_u = 0.25$

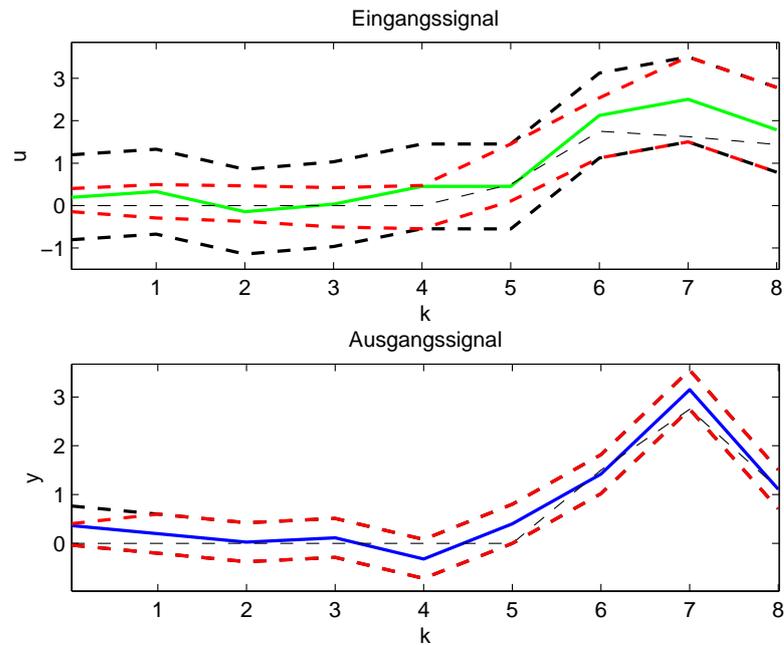


Bild 6.12: Minimale Einschließung von Ein- und Ausgangssignalen nach $k = 9$ Beobachtungsschritten mit $\Delta_y = 0.4$ und $\Delta_u = 1$

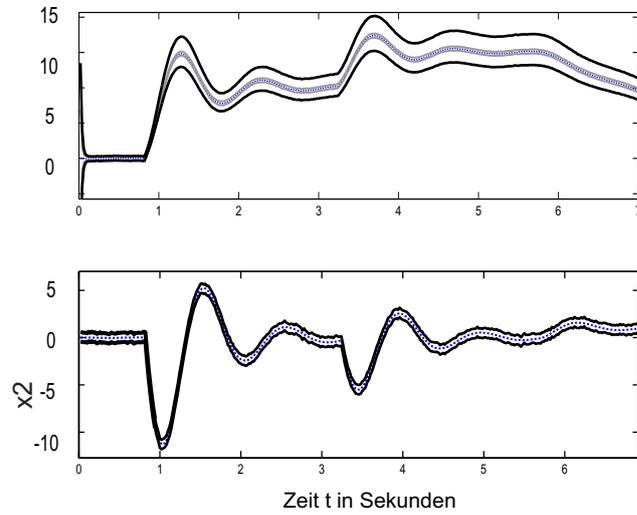


Bild 6.13: Wahrer Systemzustand $\boldsymbol{x}(t)$ und Vergleich der Zustandseinschließungen für $k_v = 0$ mit und ohne unsicheren Parameter

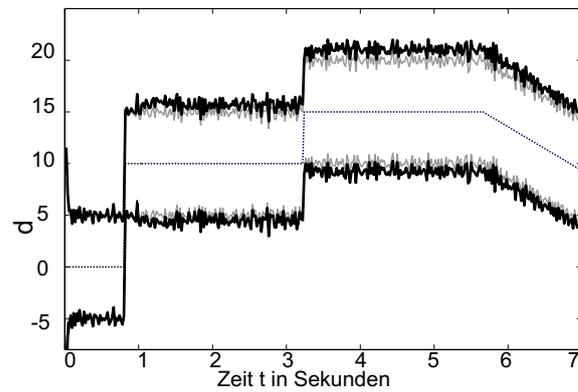


Bild 6.14: Störung $d(t)$ und Vergleich der Störgrößeneinschließungen für $k'_v = 1$ ($k_v = 0$) mit und ohne unsicheren Parameter

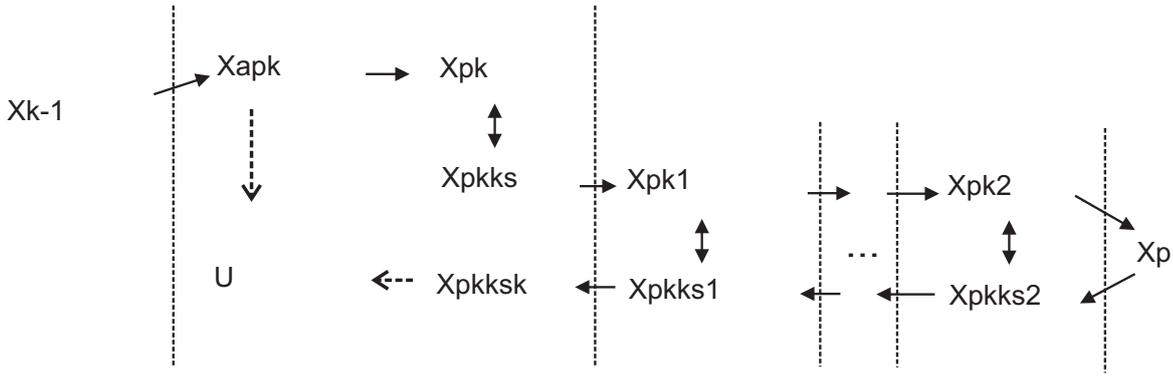


Bild 6.16: Prinzip der schrittweisen Berechnung von Stör- bzw. Eingangseinschließungen für $k'_v > 1$

von (6.35) durch Lösung linearer Programme zur Einschließung der gesuchten Größe ersetzt.

Abb. 6.13 zeigt die ermittelten Zustandseinschließungen. Da die Einschließung von $x_2(t)$ von der Messung dominiert wird, ergibt sich keine Verschlechterung durch die Berücksichtigung des Parameterintervalls für $a_{1,1}$. Die Einschließung von $x_1(t)$ liefert deutlich breitere Intervalle, insbesondere bei starker Abweichung vom Arbeitspunkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dies gilt auch für die in Abb. 6.14 in schwarz dargestellte Störgrößeneinschließung, auch wenn die Zunahme der Intervallbreite im Vergleich zur grauen Kurve für das exakte Motormodell (identisch zu Abb. 6.7) gering ausfällt. \square

6.4.4. Prinzip der schrittweisen verzögerten Beobachtung und E/A-Einschließung

Aufgrund der in Abschn. 6.4.1 genannten Schwierigkeiten, die verzögerte Zustandsmengenbeobachtung als konvexes Optimierungsproblem zu formulieren, wird das Problem jetzt in eine Reihe von Teilschritten zerlegt, welche prinzipiell mit den vorgestellten Methoden die Berechnung verzögerter Zustands- und Störeingangsmengen ermöglichen. So wurde bereits in Beispiel 6.4 des Gleichstrommotors die autonome Prädiktion separat durchgeführt, um eine kompakte Darstellung des Beobachtungsschritts ohne einen Ausdruck für die Inverse $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p})$ zu erhalten.

In Verallgemeinerung dieses Ansatzes kann nach Abb. 6.16 vorgegangen werden. Ausgehend von der Zustandsmenge $\mathcal{X}(k - k_v - 1|k)$ sind zunächst in $k_v + 1$ Beobachtungsschritten die Mengen $\mathcal{X}(k')$ zu ermitteln. Darin finden die Messinformationen $\mathcal{Y}(k - k_v) \dots \mathcal{Y}(k)$ Eingang. Anschließend wird eine k_v -fache inverse Beobachtung durchgeführt. Sie umfasst jeweils eine inverse Prädiktion und Korrektur durch Schnittbildung mit der bereits bekannten Zustandsmenge:

$$\mathcal{X}(k'|k) = \mathcal{X}(k') \cap \mathcal{X}_p^-(k')$$

Die Formulierung der Polytope zur inversen Beobachtung ermöglicht dabei im Prinzip die Ermittlung verzögerter Eingangsmengen. Als Ergebnis des letzten inversen Schritts erhält man $\mathcal{X}(k - k_v|k)$. Die Menge ist für die rekursive Verwendung des Algorithmus abzuspeichern. Oft ist man gerade an der Einschließung mit der gewählten Verzögerung

k'_v interessiert. Dazu bildet man mit Hilfe der Menge $\mathcal{X}(k - k_v - 1)$ das Polytop (6.32) und wertet es nur bezüglich der relevanten Eingangsgrößen aus. Das Prädiktionspolytop \mathcal{P}_{u1} (Gl. (6.34)) aus Beispiel 6.3 zu verwenden, ist lediglich eine Alternative dazu, wenn man zu Beginn des Zeitschritts mit autonomer Prädiktion begonnen hat.

Der Algorithmus 5 fasst die beschriebene Vorgehensweise zusammen, mit der sich für die hier verwendete Modellklasse Beobachter implementieren lassen. Die Zerlegung in Teilschritte, welche in jedem Zeitschritt in Reihe auszuführen sind, erschwert eventuelle Bestrebungen, Rechenschritte zu parallelisieren, wenn das zur Erlangung der Echtzeitfähigkeit erforderlich ist. Es ist aber innerhalb dieses Ansatzes nicht ausgeschlossen, dass der Rechenaufwand im Detail erheblich reduziert werden kann.

Algorithmus 5 Schrittweise verzögerte Zustandsmengenbeobachtung, E/A- und Störgrößeneinschließung für LDPV-Systeme

Gegeben:

- Prozessmodell $\mathcal{M} = \{LDPV_{ABC}, \mathcal{D} - LDPV, [\mathbf{e}]_u, [\mathbf{e}]_y\}$ (inklusive Störschranken $\Delta\bar{\mathbf{d}}, \Delta\mathbf{d}$)
- Messwertfolgen $\{\mathbf{u}(0 \dots k_b), \mathbf{y}(0 \dots k_b)\}$ (1.3), (1.4)
- Verzögerung k'_v ($k_v = k'_v - 1$)
- Approximationsrichtungen $\mathbf{N}_{k'-k}$ für $(k' - k) \in \{-k_v \dots 0\}$
- Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0

Initialisierung:

$$k_v = k'_v - 1, \quad k = k_v + 1$$

$$\mathcal{X}(0|k_v) = \mathcal{X}_0 \cap Proj_{\mathcal{X}} \mathcal{P}(0) \text{ mit } \mathcal{X}(-1) = \mathbb{R}^n$$

Wiederhole für alle $k \leq k_b$

$$k' = k - k_v$$

Wiederhole für alle $k' \leq k$

Beobachte $\mathcal{X}(k')$ (mit $\mathcal{Y}(k')$). Speichern.

$$k' = k' + 1$$

Ende Wiederhole

Wiederhole für alle $k' > k - k_v$

$$k' = k' - 1$$

Inverse Beobachtung $\mathcal{X}(k'|k)$ (Schnitt mit $\mathcal{X}(k')$).

Ende Wiederhole

Speichern von $\mathcal{X}(k - k_v|k - 1)$

Bildung des Polytops (6.16) (mit $\mathcal{X}(k - k_v - 1|k - 1)$)

E/A-Einschließung mit (6.21), evtl. Ausgangseinschließung durch Überapproximation mit $\pm \mathbf{n}_i^T = \pm \mathbf{c}_i^T$.

$$k = k + 1$$

Ende Wiederhole

Ergebnis:

- Mengen $\mathcal{X}(k - k_v|k)$, $\mathcal{U}(k - k'_v|k)$, $\mathcal{Y}(k - k_v|k)$ für $k \in \{k_v, \dots, k_b\}$
-

Beispiel 6.5: Numerisches Beispiel mit unsicherem Parameter

Für das numerische Beispiel 6.1 soll jetzt zusätzlich angenommen werden, dass der Parameter $a_{1,1}$ mit $a_{1,1}(p) \in [0,7, 0,9]$ ungenau bekannt ist. Für dieses einfach Beispiel soll ein Ausdruck für die Inverse $\mathbf{A}^{-1}(q)$ in *Polytoper* oder *Strukturierter* Darstellung gesucht werden. Aufgrund der Determinante $\det(\mathbf{A}) = a_{1,1}(p)a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$ wird deutlich, dass alle Parameter der In-

versen mit p variieren. Die Bildung der Maxima und Minima aller einzelnen Parameter führt auf die Intervallmatrix

$$\mathbf{A}^{-1}(p) \in \begin{pmatrix} [1,2, 1,6] & [-0,235, -0,18] \\ [-0,235, -0,18] & [-0,32, 0,239] \end{pmatrix},$$

welche sowohl eine konservative Einschließung als auch eine komplexe Beschreibung der Parameterunsicherheit darstellt. Eine genauere Betrachtung führt darauf, dass im Raum der Parameter $\hat{a}_{i,j}$ der inversen Matrix in diesem Spezialfall eine Gerade entsteht, d.h. für alle Paare von Parametern gilt

$$\frac{\partial \hat{a}_{i,j}(p)}{\partial \hat{a}_{k,l}(p)} = \frac{\partial \hat{a}_{i,j}(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \hat{a}_{k,l}(p)} = \text{const.}$$

Damit lässt sich die Darstellung

$$\mathbf{A}^{-1}(p) = \begin{pmatrix} 1,4031 & -0,2063 \\ -0,2063 & 0,3245 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -0,1931 & 0,284 \\ -0,284 & 0,0042 \end{pmatrix}$$

mit $p \in [-1, 1]$ ohne Überapproximation ableiten.

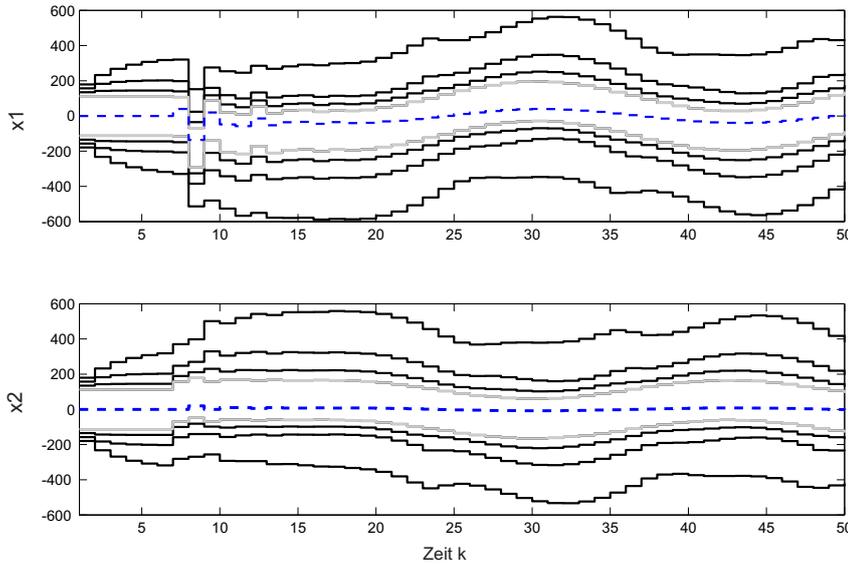


Bild 6.17: Zustandsmengenbeobachtung für $k_v = 0$ mit Parameterunsicherheit $\Delta a_{1,1} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$

Mit Algorithmus 5 und $k_v = 0$ kann auch die nicht verzögerte Zustandseinschließung ermittelt werden, wie in Abb. 6.17 für verschiedene Unsicherheiten des Parameters $a_{1,1}(p)$ gezeigt. Die wahre Zustandsgröße (gestrichelt) wird durch zunehmend breitere Intervalle eingeschlossen, wenn die Parameterunsicherheit $\Delta a_{1,1}$ zunimmt. Für $\Delta a_{1,1} = 0$ liefert der Algorithmus in diesem einfachen Beispiel die beste Einschließung (grau), welche identisch zu der mit Algorithmus 4 für exakt bekannte Systeme berechneten Einschließung für $k_v = 0$ aus den Abbildungen 6.3, 6.4 ist.

Schon für den Fall des exakt bekannten Parameters nach Beispiel 6.1 konnte sich mit $k_v = 0$ ($k'_v = 1$) keine Störgrößeneinschließung berechnet werden, die eine Verbesserung gegenüber der A priori-Kennntnis der Störgrenzen darstellt. Deshalb ist auch jetzt eine verzögerte Zustandsbeobachtung erforderlich, welche ebenfalls nach Algorithmus 5 berechnet werden kann. Abb.

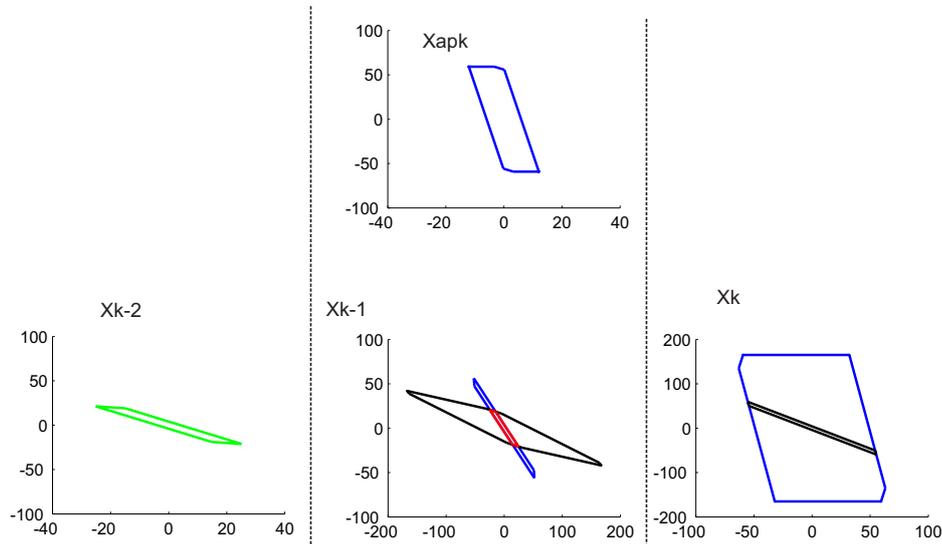


Bild 6.18: Polytope der mit $k_v = 1$ verzögerten Zustandsmengenbeobachtung

6.18 zeigt die in einem Zeitschritt ermittelten Polytope. Zunächst ist die aus der Vorgängermenge $\mathcal{X}(k-2|k-2)$ (grün) berechnete, autonom prädizierte Menge $\mathcal{X}_{ap}(k-1|k-1)$ in blau dargestellt (oben). Das Ergebnis der Zustandsbeobachtung $\mathcal{X}(k-1|k-1)$ (mitte, unten) wird dann prädiziert, woraus das blaue Polytop $\mathcal{X}_p(k)$ (rechts, unten) entsteht. Durch Schnittbildung mit der Messung erhält man das schwarze Polytop $\mathcal{X}(k)$. Zeitlich rückwärts wird die in schwarz dargestellte Menge $\mathcal{X}_p^-(k-1|k)$ (mitte, unten) ermittelt. Die verzögerte Zustandsmenge $\mathcal{X}(k-1|k)$ ist die in rot dargestellte Schnittmenge und wird zusätzlich zu $\mathcal{X}_{ap}(k-1|k-1)$ benötigt, um die Störgrößeneinschließung zu berechnen. $\mathcal{X}(k-1|k)$ wird außerdem gespeichert, da es den Ausgangspunkt für den nächsten Zeitschritt des Algorithmus darstellt.

Die Abbildungen 6.19 , 6.21 zeigen die um $k_v = 1$ bzw. $k_v = 2$ Zeitschritte verzögerten Zustandseinschließungen, die Abbildungen 6.20 , 6.22 jeweils die zugehörigen, um $k'_v = 2$ bzw. $k'_v = 3$ Zeitschritte verzögerten Zustandseinschließungen. Es werden jeweils die Annahmen $\Delta a_{1,1} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$ für den unsicheren Parameter getroffen und die ermittelten Einschließungen verglichen. Die beste Einschließung, gegeben durch das grau dargestellte Kurvenpaar, wird durch Auswertung des Algorithmus 5 unter der Annahme $\Delta a_{1,1} = 0$, also für verschwindende Parameterunsicherheit berechnet und ist für dieses Beispiel mit den in Abb. 6.3 bis 6.5 gezeigten Kurven identisch. Die mit Algorithmus 5 durchgeführten Überapproximationen sind hier wirkungslos, was auf die gewählten Approximationsrichtungen, aber auch auf die in der Simulation verwendeten Signale zurückzuführen ist. Die Qualität der Einschließung nimmt mit zunehmen-

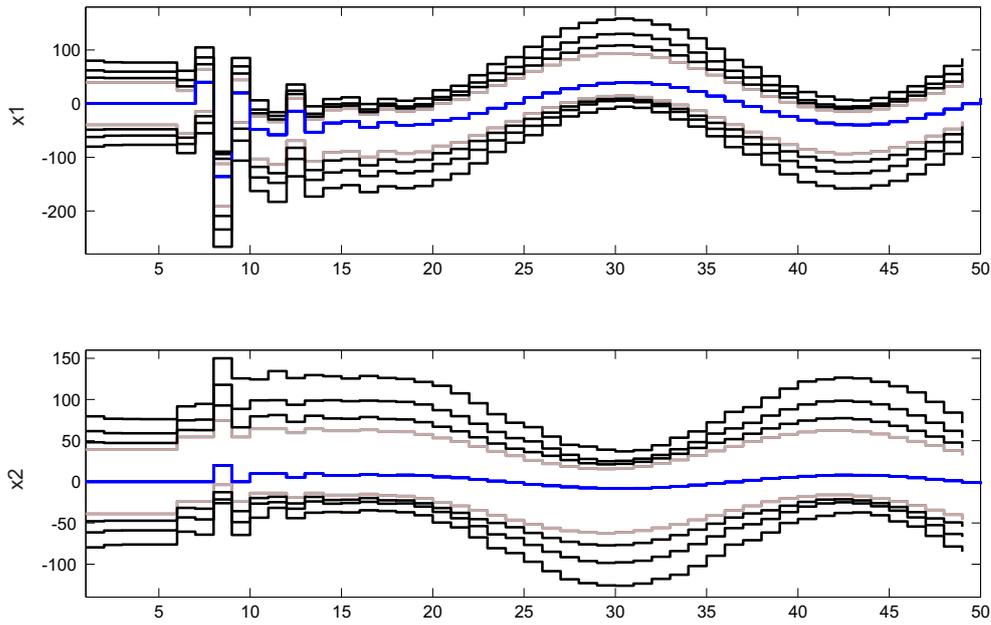


Bild 6.19: Zustandsmengenbeobachtung für $k_v = 1$ mit Parameterunsicherheit $\Delta a_{1,1} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$

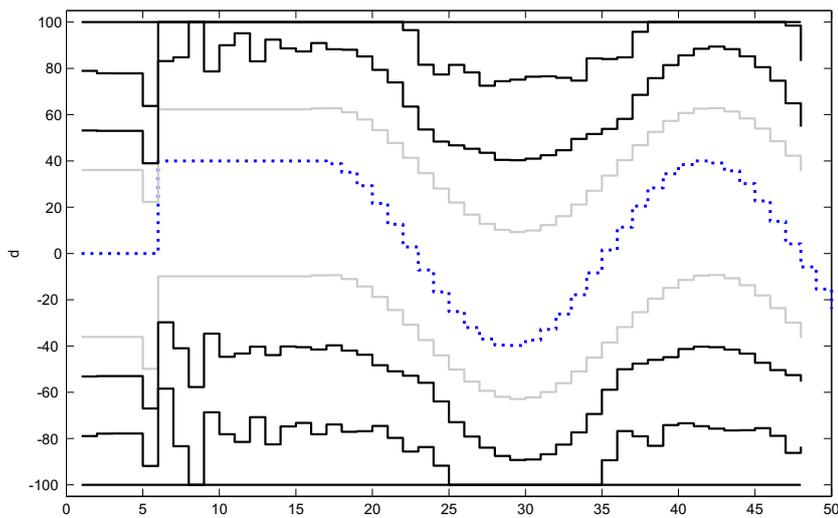


Bild 6.20: Störgrößenbeobachtung für $k'_v = 2$ mit Parameterunsicherheit $\Delta a_{1,1} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$

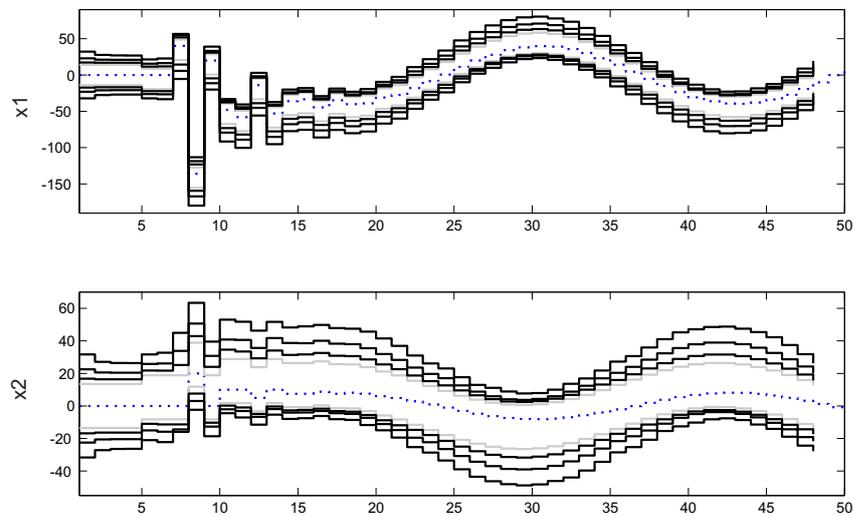


Bild 6.21: Zustandsmengenbeobachtung für $k_v = 2$ mit Parameterunsicherheit $\Delta a_{1,1} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$

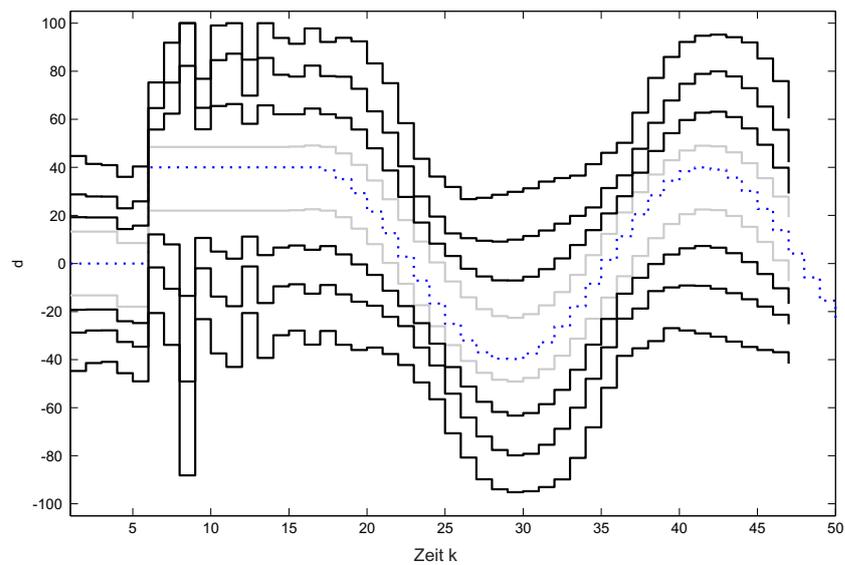


Bild 6.22: Störgrößenbeobachtung für $k'_v = 3$ mit Parameterunsicherheit $\Delta a_{1,1} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$

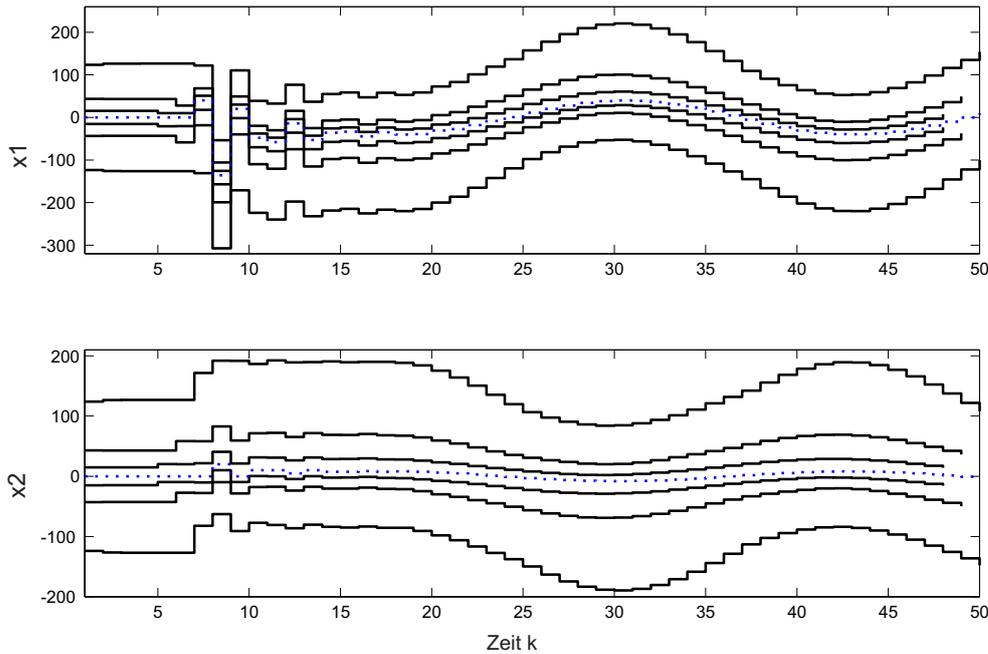


Bild 6.23: Vergleich von unterschiedlich verzögerten Einschließungen $k_v \in \{0, 1, 2\}$ für $\Delta a_{1,1} = 0,1$

der Parameterunsicherheit deutlich ab.

Die Abbildungen 6.23 und 6.24 zeigen für eine Parameterunsicherheit von $\Delta a_{1,1} = 0,1$ den Einfluss der gewählten Verzögerung. Mit einer größeren Verzögerung k_v bzw. k'_v kann für dieses Beispiel jeweils eine bessere Einschließung ermittelt werden. Eine weitere Verzögerung $k_v = 3$ bzw. $k'_v = 4$ führt hier nicht zu einer Verbesserung.

In Abb. 6.25 werden die mit zwei unterschiedlichen Modellen ermittelten Störgrößeneinschließungen für eine Simulation verglichen. Die Simulation wird jeweils mit dem durch die Matrizen (6.22) gegebenen System durchgeführt. Die erste Modellbeschreibung ist wie bisher durch $\mathbf{A}(p)$ mit $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ nach (6.22) und $\Delta a_{1,1} = 0,1$ gegeben, während für die zweite Beschreibung,

$$\mathbf{A} \in \mathbf{A}_2(q) = \begin{pmatrix} 0,705 & 0,5 \\ 0,5 & 3,4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p \in [-1, 1],$$

der Parameter $a_{1,1}$ am Rand des zulässigen Intervalls liegt. Dies führt, wie die schwarz dargestellte Kurve in Abb. 6.25 zeigt dazu, dass nach einer sprungförmigen Änderung der Störung starke Schwankungen in der ermittelten, oberen Schranke des Störsignals auftreten. Dies ist auf die gewählten Einschließungsrichtungen \mathbf{N} zurückzuführen, welche auf den Nominalfall $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ zugeschnitten sind. \square

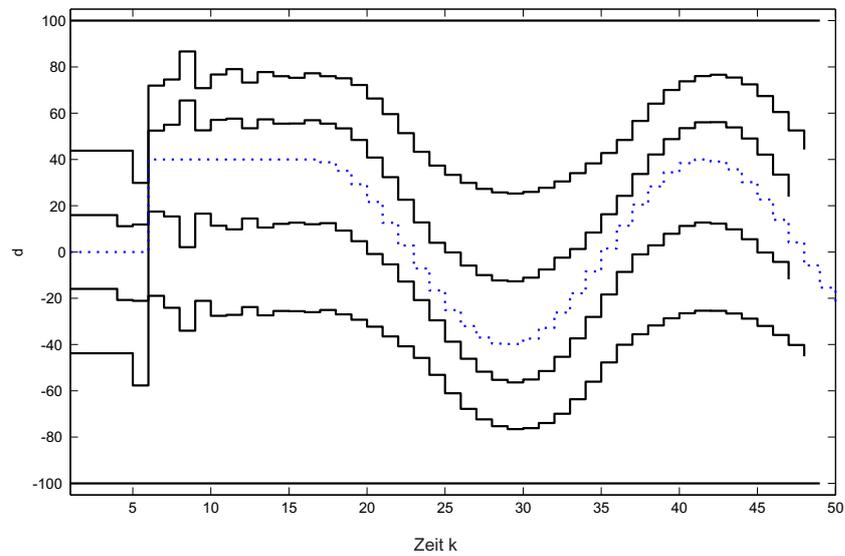


Bild 6.24: Vergleich von unterschiedlich verzögerten Einschließungen $k'_v \in \{1, 2, 3\}$ für $\Delta a_{1,1} = 0,1$

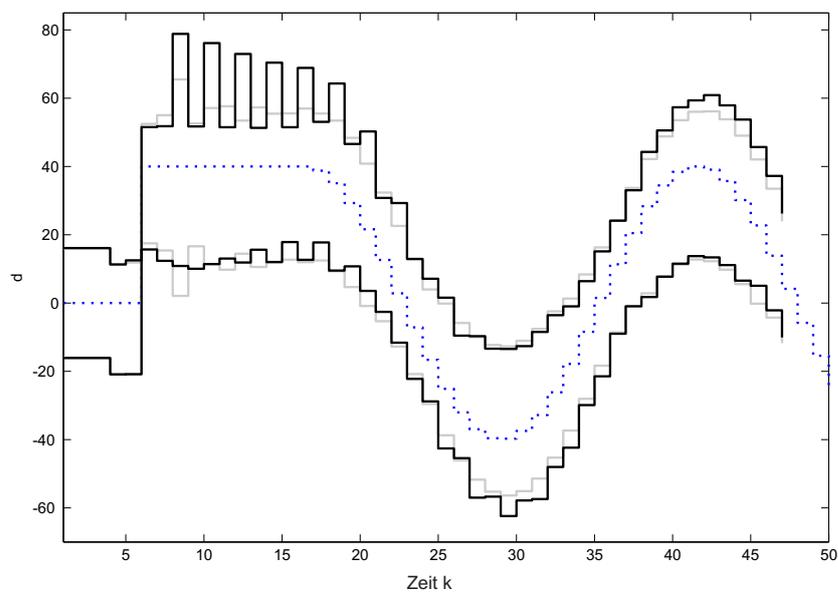


Bild 6.25: Störgrößeneinschließung für zwei unterschiedliche Modelle mit unsicheren Parametern für $k'_v = 3$

7. Konsistenzbasierte Diagnose

Die in diesem Bericht beschriebenen Methoden der Zustandsmengenbeobachtung können für die Prozessdiagnose eingesetzt werden. Das Ziel ist die Detektion und Identifikation von Fehlern [BKS06].

Prinzip der konsistenzbasierten Diagnose. Geprüft wird hier die Konsistenz eines Prozessmodells zu den zur Verfügung stehenden Messinformationen. Konsistenz ist dann gegeben, wenn das Modell aus der Folge der vorliegenden Eingangssignale die gemessene Folge von Ausgangssignalen erzeugen kann. Um die Diagnose robust gegen Messunsicherheiten und ungenau bekannte Modellparameter zu machen, können diese im Prozessmodell berücksichtigt werden. Tritt eine Inkonsistenz zwischen den Messinformationen und dem Prozessmodell auf, dann ist ein Fehler detektiert. Zur Identifikation von Fehlern sind Fehlermodelle \mathcal{M}_{f_i} erforderlich, für welche die Konsistenz zu den Messinformationen ebenfalls zu prüfen ist. Man verfügt dann über eine Menge von Fehlerkandidaten

$$\mathbb{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}. \quad (7.1)$$

Der fehlerfreie Fall f_0 wird der Menge \mathbb{F} ebenfalls zugeordnet. Lässt sich zum Zeitpunkt k die Inkonsistenz für ein Fehlermodell \mathcal{M}_{f_i} nachweisen, so kann dieser Fehlerfall für den betrachteten Zeitraum ausgeschlossen und aus der Menge $\mathbb{F}(k)$ gestrichen werden. Dieser Ansatz wird in [Pla06] und [ea08] verfolgt. Dort wird auch gezeigt, dass die Anwendung der Zustandsmengenbeobachtung auf Algorithmen zur Fehlerdiagnose führt, die ein vollständiges Diagnosergebnis liefern. Vollständigkeit bedeutet hier, dass kein Fehlerfall fälschlicherweise ausgeschlossen wird, da hierfür der Nachweis der Inkonsistenz des Fehlermodells erforderlich ist.

Zur Prüfung der (In-)Konsistenz für ungenau bekannte Systeme unter dem Einfluss von Messunsicherheiten eignet sich die Zustandsmengenbeobachtung. Ist die beobachtete Zustandsmenge zu einem Zeitpunkt k leer, dann liegt Inkonsistenz vor:

$$\mathcal{X}_{f_i} = \emptyset \implies \mathcal{M}_{f_i} \text{ inkonsistent}. \quad (7.2)$$

Verzögerte Beobachtung und Diagnose. Die Modellannahmen über den Prozess bzw. den aufgetretenen Fehler sind nach Gl. (7.2) verletzt worden, womit dieser Fehlerfall ausgeschlossen werden kann. Umgekehrt muss eine Verletzung der Modellannahmen aber nicht unbedingt auf eine verschwindende Zustandsmenge führen. Die Abweichung von den Modellannahmen muss signifikant sein, um eine Inkonsistenz des Modells zu detektieren. Die Frage der Identifizierbarkeit ist für die hier behandelten Modelle mit parametrischen Unsicherheiten schwer zu beantworten und wird nicht weiter behandelt. Zu beachten ist, dass beispielsweise Messfehler in Ein- und Ausgangsgrößen konsistent zu einem Modell sein können, da sie sich gegenseitig kompensieren.

Unter der Annahme, dass die Zustandsmengen $\mathcal{X}^*(k)$ berechnet werden können, ist die Beobachtung einer nichtleeren Zustandsmenge nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Konsistenz des Modells, wie das folgende Theorem zeigt. Im Allgemeinen gilt, dass die Zustandseinschließung zum Zeitpunkt k durch Hinzunahme weitere Messinformationen über den zusätzlichen Beobachtungszeitraum k_b verbessert werden kann. Das gilt auch für exakte Beobachtungen:

$$\mathcal{X}^*(k \mid 0 \dots k) \supseteq \mathcal{X}^*(k \mid 0 \dots k + k_b) \text{ für } k_b > 0 \quad (7.3)$$

Allerdings wird in [Pla06] gezeigt, dass für exakte Zustandsmengen \mathcal{X}^* gilt:

Theorem 7 (Konsistenz bei exakter Zustandsmengenbeobachtung [Pla06])

Für ein Modell \mathcal{M}_f mit Anfangszustandsmenge \mathcal{X}_0 gilt

$$\mathcal{X}^*(k | 0 \dots k) \neq \emptyset \iff \mathcal{X}^*(0 | 0 \dots k) \neq \emptyset. \quad (7.4)$$

Daraus folgt direkt

$$\mathcal{X}_{f_i}^* = \emptyset \iff \mathcal{M}_{f_i} \text{ inkonsistent.} \quad (7.5)$$

Deshalb kann eine exakte Einschließung zum Zeitpunkt k durch zukünftige Messinformationen $\mathcal{Y}(k \dots k_b)$ zwar verbessert werden, führt allerdings nur dann auf die leere Menge, wenn auch die aktuell beobachtete Menge $\mathcal{X}^*(k | 0 \dots k)$ verschwindet und damit die Inkonsistenz des Modells anzeigt. Damit kann das Diagnosergebnis bei exakter Zustandsmengenbeobachtung nicht dadurch verbessert werden, dass a posteriori bessere Zustandseinschließungen berechnet werden.

Findet allerdings in mindestens einem Beobachtungsschritt eine Überabschätzung statt, so kann diese dazu führen, dass eine Inkonsistenz nicht erkannt wird. In diesem Fall kann möglicherweise zum Zeitpunkt k durch a posteriori-Berechnung der Zustandsmenge $\mathcal{X}(k | 0 \dots k + k_b)$ mit $k_b > 0$ nicht nur die Einschließung von Zustands- und Eingangsgrößen verbessert werden, sondern auch nachträglich eine Modellinkonsistenz festgestellt werden, wodurch das Diagnoseergebnis verbessert wird.

Beispiel 7.1: Fehlerdetektion für ein System dritter Ordnung.

In diesem Beispiel wird das folgende Modell des fehlerfreien Prozesses betrachtet:

$$\mathcal{M}_{f_0} := \{\{\mathbf{A}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0\}, [\mathbf{e}]_u, [\mathbf{e}]_y\} \text{ mit} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & -2.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Für die Messfehler gilt $\mathbf{u} \leq 1$, $\mathbf{y} \leq 0.2$. Es sollen hier zwei Fehler betrachtet werden. Im ersten Fehlerfall f_1^* ändert sich nur der Eingangsvektor, während im Fehlerfall f_2 auch eine Änderung der Systemmatrix erfolgt. Zum Zeitpunkt $k = 0$ tritt der durch das Modell

$$\mathcal{M}_{f_i}^* := \{\{\mathbf{A}_0, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_0\}, *\} \text{ mit } \mathbf{b}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T \quad (7.8)$$

gegebene Fehlerfall f_1^* ein. Wie man Abb. 7.1 entnimmt, liefert die Beobachtung trotzdem nichtleere Zustandsmengen für $1 < k \leq 8$, wobei Intervalle der einzelnen Zustandsgrößen in schwarz dargestellt sind. Zum Zeitpunkt $k = 9$ erhält man als Schnittmenge von Prädiktion und Messung die leere Menge, womit das fehlerfreie Modell inkonsistent und der Fehler detektiert ist. Für $k \geq 9$ wird die Beobachtung hier fortgesetzt, indem die Fehlermodelle $\mathcal{M}_{f_1}^*$ und \mathcal{M}_{f_2} betrachtet werden und außerdem das fehlerfreie Modell neu initialisiert wird. Dazu werden Anfangszustandsmengen mit physikalisch sinnvollen Schranken der Zustandsgrößen gewählt. Das fehlerfreie Modell \mathcal{M}_{f_0} wird bereits nach zwei Schritten erneut inkonsistent, was

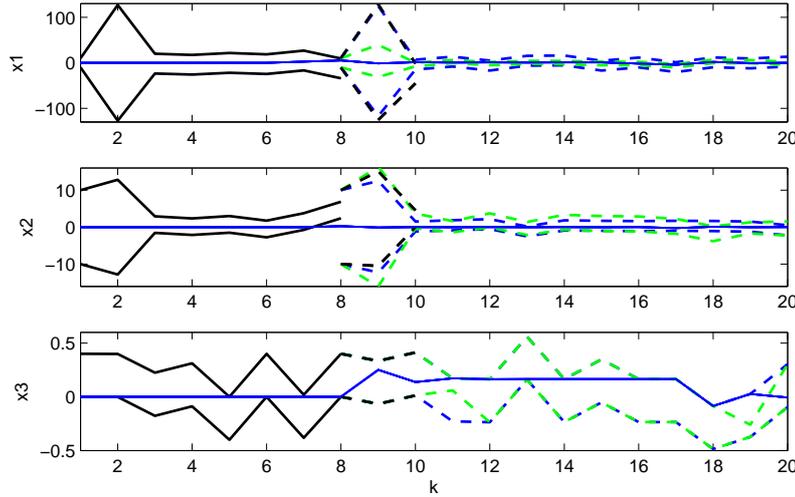


Bild 7.1: Fehlerdetektion für ein System dritter Ordnung

das Verbleiben des Systems im Fehlermodus bestätigt. Das Modell des wahren Fehlers führt natürlich nicht zu Inkonsistenz. Dasselbe gilt hier für das Modell \mathcal{M}_{f_2} , welches sich vom wahren Fehlerfall noch um ein Element der Systemmatrix ($a_{2,1} = 0.45$) unterscheidet. Damit konnte der Fehler detektiert, nicht aber identifiziert werden:

$$\mathbb{F} = \{f_1, f_2\}. \quad (7.9)$$

Die Beobachtung wurde hier durch \mathbf{N} -minimale Überapproximation in den Richtungen $\mathbf{N} = (\mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^T, (\mathbf{A}^{-2}\mathbf{C})^T)^T$ durchgeführt. Wie sich in der folgenden Fortsetzung des Beispiels zeigt, hätte der Fehler durch ein präziseres Beobachtungsverfahren auch identifiziert werden können. \square

Beispiel 7.2: Fortsetzung von Beispiel 7.1 , Fehleridentifikation (A posteriori)

Hier wird das System aus Beispiel 7.1 erneut betrachtet, wo zum Zeitpunkt $k = 8$ der aufgetretene Fehler detektiert wurde. Die beiden Fehlermodelle $\mathcal{M}_{f_1}^*$ und \mathcal{M}_{f_2} wurden dann initialisiert. Mit den Messinformationen bis zum Zeitpunkt $k = 20$ konnte bei \mathbf{N} -minimaler Beobachtung keine Inkonsistenz festgestellt werden. In Abb. 7.2 werden ausgehend von der Zustandsmenge $\mathcal{X}(20)$ die durch inverse, exakte Prädiktion berechneten Zustandseinschließungen für das Modell $\mathcal{M}_{f_1}^*$ in rot dargestellt. Da es sich um den wahren Fehler f_1^* handelt, tritt erwartungsgemäß keine Inkonsistenz auf, auch wenn die Einschließungen deutlich besser sind, als die in grün dargestellten Ergebnisse der online-Beobachtung. Das Modell \mathcal{M}_{f_2} wird, wie Abb. 7.2 verdeutlicht, bereits nach zwei Schritten inkonsistent zu den Messwerten. Deshalb wird f_2 ausgeschlossen und der Fehler f_1^* ist identifiziert. \square

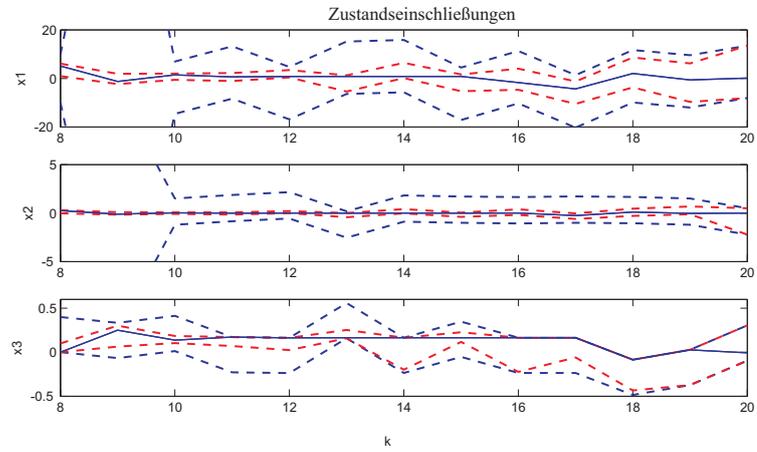


Bild 7.2: Einschließungen der Zustandsgrößen für das wahre Fehlermodell $\mathcal{M}_{f_1}^*$

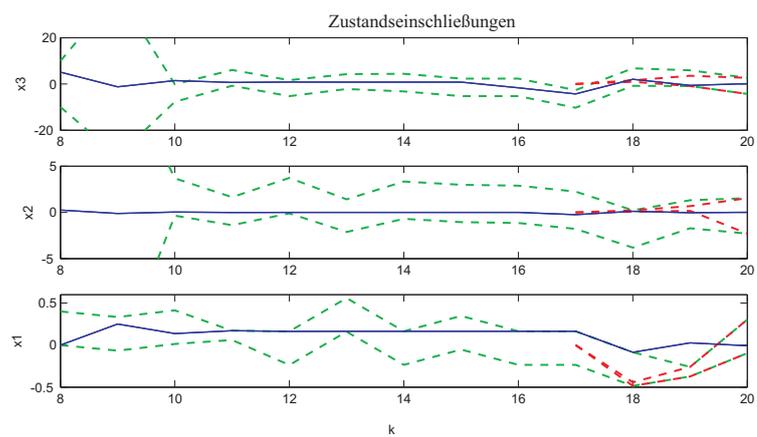


Bild 7.3: Einschließungen der Zustandsgrößen für das Fehlermodell \mathcal{M}_{f_2} .

Literatur- und Quellenverzeichnis

- [ABC05] T. Alamo, J.M. Bravo, and E.F. Camacho. Guaranteed state estimation by zonotopes. *Automatica*, 41:1035–1043, 2005.
- [Ack93] J. Ackermann. *Robust Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Bao09] Mato Baotic. *Polytopic Computations in Constrained Optimal Control*, volume 50. KoREMA - Croatian Society for Communications, Computing, Electronics, Measurement and Control, 2009.
- [BKS06] M. Blanke, M. Kinnaert, and M. Staroswiecki. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer Verlag, 2006.
- [BM08] Franco Blanchini and Stefano Miani. *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhäuser, London, 2008.
- [BS79] B. Barmish and J. Sankaran. The propagation of parametric uncertainty via polytopes. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 24, 1979.
- [BV04] S.P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Berichte über verteilte messsysteme. Cambridge University Press, 2004.
- [CGTV07] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions. *Automatica*, 43:309–316, 2007.
- [dBvKOS00] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 2000.
- [dL08] P. de Leòn. *Dependable Control of Uncertain Linear Systems based on Set-theoretic Methods*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, 2008.
- [DS74] EJ Davison and HW Smith. A note on the design of industrial regulators: Integral feedback and feedforward controllers. *Automatica*, 10(3):329–332, 1974.
- [ea08] P. Planchon et al. Diagnosis of linear systems with structured uncertainties based on guaranteed state observation. *Int. J. of Control Automation and Systems*, pages 306 – 319, 2008.
- [EB75] Werner Oettli Eugen Blum. *Mathematische Optimierung: Grundlagen und Verfahren*. Springer, 1975.
- [FB06] T. Floquet and J.-P. Barbot. State and unknown input estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*, 42:1883 – 1889, 2006.
- [FL11] J. Falkenhain and J. Lunze. Garantierte Störgrößeneinschließung für lineare zeitdiskrete Systeme. *Automatisierungstechnik*, 59(2):104–113, 2011.
- [Fuk04] Fukuda. Frequently Asked Questions in Polyhedral Computation, 2004.
- [GG08] Antoine Girard and Colas Le Guernic. Zonotope/Hyperplane Intersection for Hybrid Systems Reachability Analysis. In *HSCC*, 2008.

- [GK92] Peter Gritzmann and Victor Klee. Inner and outerj-radii of convex bodies in finite-dimensional normed spaces. *Discrete & Computational Geometry*, 7(3):255–280, 1992.
- [GO04] Jacob E. Goodman and Joseph O’Rourke, editors. *Handbook of discrete and computational geometry*. Discrete mathematics and its applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (FLA), London, New York (N. Y.), 2004.
- [Gro03] Prof. Dr. Martin Groetschel. Lineare Optimierung. Technical report, Technische Universität Berlin, 2003.
- [Har84] S. Hara. Unknown input observability for discrete-time linear multivariable systems and its application. *Int. J. of Control*, 1984.
- [Hou99] P. C. Hou, M.; Muller. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(6):1338 – 1341, 1999.
- [HP98] M. Hou and R. J. Patton. Input observability and input reconstruction. *Automatica*, 34:789 – 794, 1998.
- [JD05] Lionel Rosier Jamal Daafouz, Gilles Millerioux. Observer design with guaranteed bound for LPV systems. In *IFAC*, 2005.
- [JKM08] C.N. Jones, E.C. Kerrigan, and Jan M. Maciejowski. On Polyhedral Projection and Parametric Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 138(2), April 2008.
- [JKoCEDM04] C.N. Jones, E.C. Kerrigan, University of Cambridge. Engineering Department, and J.M. Maciejowski. *Equality Set Projection: A New Algorithm for the Projection of Polytopes in Halfspace Representation*. CUED/F-INFENG/TR. University of Cambridge, Department of Engineering, 2004.
- [Joh71] C. D. Johnson. Accomodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6):635–644, 1971.
- [Jol04] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer, 2004.
- [JTP97] J. Jin, M. Tahk, and C. Park. Time-delayed state and unknown input observation. *Int. J. of Control*, 66:733 – 745, 1997.
- [Ker00] E. C. Kerrigan. *Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control*. PhD thesis, St. john’s College, 2000.
- [Ker05] E. C. Kerrigan. MATLAB-based Invariant Set Toolbox. <http://www-control.eng.cam.ac.uk/eck21/matlab/invsetbox/index.html>, 2005.
- [KGB04] M. Kvasnica, P. Grieder, and M. Baotić. Multi-Parametric Toolbox (MPT), 2004.
- [Koe01] B. Koeppen. Analyse und Abschätzung der Beobachtungsgenauigkeit von Intervallbeobachtern. Master’s thesis, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2001.

- [Kom16] Fukuda Komei. Lecture: Polyhedral Computation. Technical report, ETH Zürich, 2016.
- [Küh98] W. Kühn. Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect. *Computing*, 61(1):47–67, 1998.
- [KV80] P. Kudva and N. Viswanadham. Observers for linear systems with unknown inputs. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 25:113–115, 1980.
- [LGA03] H. Lin, G.Zhai, and P.J. Antsaklis. Set-valued observer design for a class of uncertain linear systems with persistent disturbance and measurement noise. *Int. J. of Control*, 76:1644–1653(10), 2003.
- [LJW01] Olivier Didirt Luc Jaulin, Michel Kieffer and Eric Walter. *Applied Interval Analysis*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [MAT15] MATLAB. *version 8.06.0 (R2015a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2015.
- [Moo69] Ramon E Moore. Interval analysis. 1966. *Prince-Hall, Englewood Cliffs, NJ*, 1969.
- [MPE⁺07] J. Meseguer, V. Puig, T. Escobet, J. Quevedo, and B. Pulido. Sensor fault diagnosis using linear interval observers. *18th Int. Workshop on Principles of Diagnosis (DX-07)*, 2007.
- [Neu04] A. Neumaier. *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge University Press, London, 2004.
- [PENdlH08] V. Puig, J. Quevedo T. Escobet, F. Nejari, and S. de las Heras. Passive robust fault detection of dynamic processes using interval models. *IEEE Trans. on Control System technology*, 2008.
- [Pfa10] Andreas Pfaffenholz. Polyhedral Geometry and Linear Optimization. Technical report, Freie Universität Berlin, 2010.
- [Pla06] P. Planchon. Guaranteed Diagnosis of Uncertain Linear Systems using State-set Observation. Phd-thesis, Ruhr-Universität Bochum, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, 2006.
- [PSQ03] V. Puig, J. Saludes, and J. Quevedo. Worst-case simulation of discrete linear time-invariant interval dynamic systems. *Reliable Computing*, 9:251–290, 2003.
- [Rau08] A. Rauh. Theorie und Anwendung von Intervallmethoden für Analyse und Entwurf robuster und optimaler Regelungen dynamischer Systeme. Phd-thesis, Universität Ulm, 2008.
- [Rie01a] U. Riedel. Definition der Intervallbeobachtbarkeit und Ableitung von Beobachtbarkeitskriterien. Technical report, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2001.
- [Rie01b] U. Riedel. Obere Schranken für bleibende Beobachtungssfehler bei der Intervallbeobachtung linearer Systeme. Technical report, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2001.

- [Ros10] Kenneth H. Rosen. *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC, 2nd edition, 2010.
- [Sch68] F. Scheppe. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1968.
- [Sch73] F. Scheppe. *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice Hall, 1973.
- [Sch03] J. Schröder. *Modelling, State Observation and Diagnosis of Quantised Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [Sch04] Bernhard Schmitt. Lineare Optimierung. Technical report, Universität Marburg, 2004.
- [ST99] J. S. Shamma and K.-Y. Tu. Set-valued observers and optimal disturbance rejection. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1999.
- [Str04] Wolfgang Straßer. Einführung in die Computergraphik. Technical report, Fern-Universität Hagen, 2004.
- [Unb00] H. Unbehauen. *Regelungstechnik II*. Vieweg Verlag, 2000.
- [vG08] Daniel Ch. von Grünigen. *Digitale Signalverarbeitung mit einer Einführung in die kontinuierlichen Signale und Systeme*. Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2008.
- [Wol10] Florian Wolff. *Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose nichtlinearer Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtung*. PhD thesis, Karlsruher Institut für Technologie, 2010.
- [Zie95] Günter M. Ziegler. *Lectures on polytopes*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 1995.

Abbildungsverzeichnis

1.1. Struktur der Zustands- und Störgrößenbeobachtung	7
1.2. Allgemeine Schritte der Zustandsmengenbeobachtung	8
2.1. Konfidenz und Fehlerintervall bei unsymmetrischen Fehlerschranken . .	13
2.2. Fehlerschranken am Beispiel des Messsignals	14
3.1. Verlauf unsicherer Matrixparameter bei Normierungsschritten. Skript: Modelle_xyz.m	25
3.2. Verlauf der unsicheren Matrixparameter von $\mathbf{A}(s)$. Skript: SUBsp1_sysOrdnung2.m	27
3.3. Vergleich des Originalsystems mit Intervallmatrix und <i>Strukturierter Be-</i> <i>schreibung</i> . Skript: SUBsp1_sysOrdnung2.m	28
3.4. Vergleich des Originalsystems, der Intervallmatrix und der <i>Strukturier-</i> <i>ten Beschreibungen</i> $\mathcal{M}_{S,1}(\mathbf{p})$ (schwarz) und $\mathcal{M}_{S,2}(\mathbf{p})$ (gelb). Skript: SUBsp1_sysOrdnung2.m	28
3.5. Polytope Einschließung von ungenau bekannten Parametern mit vier Eckpunkten. Skript: polytopicSystem.m	30
3.6. Polytope Einschließung von ungenau bekannten Parametern mit sechs Eckpunkten. Skript: polytopicSystem.m	31
3.7. Vergleich der Beschreibungen des Originalsystems, durch Intervallma- trix und durch Hauptkomponentenanalyse ermittelte strukturierte Un- bestimmtheit. Skript: uncParameter_PCA.m	34
3.8. Darstellung der Parameter nach Hauptachsentransformation. Skript: uncParameter_PCA.m	35
4.1. Prädiktion mit ungenau bekanntem Eingang. Skript: testpredict_exact2.m.	41
4.2. Prädiktion mit ungenau bekanntem Eingang, Überapproximation. Skript: testpredict_exact3.m.	43
4.3. Prädiktion mit ungenau bekanntem autonomem System. Skript: testpredict_overPerfect.m	48
4.4. Prädiktion mit ungenau bekanntem System. Skript: testpredict_EingangX.m	49
4.5. Prädiktion mit ungenau bekanntem System unter Verwendung zusätzli- cher Approximationsrichtungen. Skript: testpredict_EingangX.m . .	50
4.6. Prädiktion mit <i>Polytope Beschreibung</i> . Skript: compare_PolyStruct.m	52
4.7. Abbildung verschiedener Polytope (blau) mit Unsicherheit in der Sy- stemmatrix nach Gl. (4.85). Skript: sys1_UsingleQ.m	55
4.8. Singulärer Sonderfall: Bei Abbildung des Polytops entsteht keine Kante in Richtung \mathbf{v}	55
4.9. Abbildung verschiedener Polytope (blau) mit Unsicherheit in der Sy- stemmatrix nach Gl. (4.87) ohne feste Richtung. Skript: sys1_UsingleQ2.m	56
4.10. Abbildung verschiedener Polytope (blau) mit unsicherer Matrix (4.92). Skript: sys1_UviererQ.m	57
4.11. Abbildung verschiedener Polytope mit unsicherer Matrix (4.97). Skript: sys1_UrightHvecQ.m	58
4.12. Abbildung verschiedener Polytope mit unsicherer Matrix (4.100). Skript: S2matrices1.m	60
4.13. Abbildung der Einheitswürfel mit der Unsicherheit nach Matrix (4.106). Skript: sys3D_1.m	61

4.14. Bildmengen der Abbildung verschiedener Vorgängerpolytope mit Unsicherheit nach Matrix (4.112). Skript: <code>sys3D_3.m</code>	62
4.15. Abbildung eines Vorgängerpolytops in singulärer Lage. Skript: <code>sys3D_3singulaer.m</code>	63
4.16. Verschiedener Vorgängerpolytope mit Einschließung in Richtung $\pm \mathbf{m}^T \mathbf{A}_0$. Skript: <code>sys3D_rangabfall1.m</code>	64
4.17. <code>sys3D_rangabfall1.m</code>	65
4.18. Intervalle für den Systemzustand bei \mathbf{N} -minimaler Prädiktion und Überapproximation. Skript: <code>compare_PolyStructOUT1.m</code>	66
4.19. Intervalle für den Systemausgang bei exakter Prädiktion. Skript: <code>compare_PolyStructOUT2.m</code>	67
4.20. Intervalle für den Systemausgang bei Beschränkung von M_p . Skript: <code>compare_PolyStructOUT3.m</code>	68
5.1. Interne Struktur des Zustandsmengenbeobachters	72
5.2. Beispiel für nicht-konvexe, unbeschränkte Zustandsmenge durch Messung und unsicheren Parameter. Skript: <code>nkMessung.m</code>	75
5.3. Zustandsmengenbeobachtung für ein instabiles System (\mathbf{A}) zweiter Ordnung (\mathbf{A}). Skript: <code>observation_Example1.m</code>	77
5.4. Zustandsintervalle für ein System (\mathbf{A}) zweiter Ordnung. Skript: <code>observation_Example1.m</code>	77
5.5. Ein- und Ausgangsintervalle für ein instabiles System (\mathbf{A}) zweiter Ordnung. Skript: <code>observation_Example1.m</code>	78
5.6. Zustandsmengenbeobachtung für ein instabiles System (\mathbf{A}) zweiter Ordnung mit Messfehlern. Skript: <code>observation_Example1.m</code>	79
5.7. Zustandsmengenbeobachtung für ein stabiles System ($\tilde{\mathbf{A}}$) zweiter Ordnung. Skript: <code>observation_Example21.m</code>	79
5.8. Zustandsmengenbeobachtung für ein stabiles System ($\tilde{\mathbf{A}}$) zweiter Ordnung. Skript: <code>observation_Example21.m</code>	80
5.9. Komplexität der prädizierten Zustandspolytope \mathcal{X}_p . Skript: <code>observation_Example21.m</code>	80
5.10. Zustandseinschließung für ein System dritter Ordnung mit Durchgriff. Skript: <code>DurchgriffOverapprox/_init.m</code>	85
5.11. E-/A-Einschließung für ein System dritter Ordnung mit Durchgriff. Skript: <code>DurchgriffOverapprox/_init.m</code>	85
5.12. Komplexität der Zustands-/Eingangspolytope bei exakter Beobachtung mit Durchgriff. Skript: <code>DurchgriffOverapprox/_init.m</code>	86
5.13. Zustandseinschließung für ein System dritter Ordnung mit Durchgriff. Skript: <code>DurchgriffOverapprox/_init.m</code>	87
5.14. Zustandseinschließung für ein System dritter Ordnung mit Durchgriff. Skript: <code>Durchgriff_init.m</code>	88
5.15. Beobachtung der Zustandsgrößen des erweiterten Modells (5.33). Skript: <code>stoermodell1.m</code>	89
5.16. Erweitertes Zustandspolytop bei exakter Beobachtung zu Zeitpunkt $k = 10$. Skript: <code>stoermodell1.m</code>	90
5.17. Beobachtung der Zustandsgrößen des erweiterten Modells (5.33), exakte und \mathbf{N} -minimale Beobachtung. Skript: <code>stoermodell13.m</code>	91
5.18. Zahl der Ungleichungen bei exakter und \mathbf{N} -minimaler Beobachtung. Skript: <code>stoermodell13.m</code>	91

5.19. Zustandsmengen des Sinus-Generators bei Beobachtung eines sinusförmigen Signals. Skript: <code>generator_omegavar.m</code>	92
5.20. Zustandsmengen des Sinus-Generators bei Beobachtung eines aufklingenden Sinus. Skript: <code>generator_omegavar2.m</code>	93
5.21. Beobachtung mit Anfangszustandsmenge $\mathcal{X}_0^* = \mathbb{R}^2$	94
5.22. Beobachtung eines Systems vierter Ordnung bei unbekanntem Anfangszustand. Skript: <code>observable1.m</code>	98
5.23. Zustandspolytope bei Beobachtung eines nicht beobachtbaren Systems zweiter Ordnung. Skript: <code>unobservable1_2.m</code>	99
5.24. Zustandsintervalle bei Beobachtung und Prädiktion für ein nicht beobachtbares Systems. Skript: <code>unobservable1_2.m</code>	100
5.25. Zustandsintervalle bei der Beobachtung für ein nicht beobachtbares System mit unterschiedlichen Anfangszustandsmengen. Skript: <code>unobservable1_2.m</code>	100
5.26. Zustandsintervalle für das modifizierte System $(\tilde{\mathbf{A}})$, ermittelt durch Prädiktion und Beobachtung. Skript: <code>unobservable1_2.m</code>	101
5.27. Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke für ein System (\mathbf{A}) vierter Ordnung. Skript: <code>test_fehler1.m</code>	103
5.28. Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke für ein System $(\tilde{\mathbf{A}})$ vierter Ordnung. Skript: <code>test_fehler1.m</code>	104
5.29. Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke bei Beobachtung mit \mathbf{N}_1 . Skript: <code>test_fehler2.m</code> , <code>observable2.m</code>	106
5.30. Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke bei Beobachtung mit \mathbf{N}_2 . Skript: <code>test_fehler2.m</code> , <code>observable2.m</code>	107
5.31. Beobachtungsfehler und obere Fehlerschranke bei Beobachtung mit \mathbf{N}_3 . Skript: <code>test_fehler2.m</code> , <code>observable2.m</code>	108
5.32. Obere Fehlerschranke für verschiedene Beobachtungsverfahren für ein System vierter Ordnung. Skript: <code>observable2.m</code>	109
6.1. Prinzip der E/A-Einschließung	112
6.2. Prinzip der verzögerten E/A-Beobachtung	114
6.3. Wahrer Systemzustand $x_1^*(k)$ und exakte Zustandseinschließungen für die Verzögerungen $k_v \in \{0, 1, 2\}$. Skript: EA-Ermittlung/diagnose_ExampleDelX	118
6.4. Wahrer Systemzustand $x_2^*(k)$ und exakte Zustandseinschließungen für die Verzögerungen $k_v \in \{0, 1, 2\}$. Skript: EA-Ermittlung/diagnose_ExampleDelX	119
6.5. Wahre Störgröße $d^*(k)$ und mit der Verzögerung $k'_v = 2$ bzw. $k'_v = 3$ berechnete Einschließung. Skript: EA-Ermittlung/diagnose_ExampleDelX	119
6.6. Wahrer Systemzustand $x^*(t)$ und minimale Zustandseinschließung mit $k_v = 0$. Skript: EA-Ermittlung/Motor_Bsp_ohneModell/diagnose_ExampleDelX . . .	121
6.7. Wahre Störgröße $d^*(t)$ und mit der Verzögerung $k'_v = 1$ berechnete Einschließung ohne Störmodell. Skript: EA-Ermittlung/Motor_Bsp_ohneModell/diagnose_ExampleDelX . . .	122
6.8. Wahre Störgröße $d^*(t)$ und mit Störmodell berechnete Einschließungen für $k_v = 0$ und $k_v = 1$. Skript: EA-Ermittlung/Motor_Bsp_mitModell/diagnose_ExampleDelX . . .	122
6.9. Beobachtete und a posteriori-Zustandsmengen eines Systems zweiter Ordnung. Skript: <code>Diagnose/diagnose_2Ordnung.m</code>	126

6.10. Ordnung der Zustandspolytope bei exakter Beobachtung ($k_p < 9$) und a posteriori Berechnung. Skript: Diagnose/diagnose_20Ordnung.m . . .	126
6.11. Exakte Einschließung von Ein- und Ausgangssignalen nach $k = 9$ Beobachtungsschritten mit $\Delta_y = 0.8$ und $\Delta_u = 0.25$. Skript: Diagnose/diagnose_20Ordnung.m	127
6.12. Exakte Einschließung von Ein- und Ausgangssignalen nach $k = 9$ Beobachtungsschritten mit $\Delta_y = 0.4$ und $\Delta_u = 1$. Skript: Diagnose/diagnose_20Ordnung.m	127
6.13. Wahrer Systemzustand $\mathbf{x}^*(t)$ und Vergleich der Zustandseinschließungen für $k_v = 0$ mit und ohne unsicheren Parameter. Skript: EA-Ermittlung/MotorBsp_ModellUnsicherK0.m	128
6.14. Störung $d^*(t)$ und Vergleich der Störgrößeneinschließungen für $k'_v = 1$ ($k_v = 0$) mit und ohne unsicheren Parameter. Skript: EA-Ermittlung/MotorBsp_ModellUnsicherK0.m	128
6.15. Prinzip der schrittweisen Berechnung von Stör- bzw. Eingangseinschließungen, hier für $k'_v = 1$	129
6.16. Prinzip der schrittweisen Berechnung von Stör- bzw. Eingangseinschließungen für $k'_v > 1$	130
6.17. Zustandsmengenbeobachtung für $k_v = 0$ mit Parameterunsicherheit $\Delta_{a_{1,1}} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$. Skript: EA-Ermittlung/NumerikBsp_ModellUk0/diagnose_ExampleDel0.m . .	132
6.18. Polytope der mit $k_v = 1$ verzögerten Zustandsmengenbeobachtung. Skript: EA-Ermittlung/NumerikBsp_ModellUk0/diagnose_ExampleDel0.m . .	133
6.19. Zustandsmengenbeobachtung für $k_v = 1$ mit Parameterunsicherheit $\Delta_{a_{1,1}} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$. Skript: EA-Ermittlung/NumerikBsp_ModellUk0/diagnose_ExampleDel0.m . .	134
6.20. Störgrößenbeobachtung für $k'_v = 2$ mit Parameterunsicherheit $\Delta_{a_{1,1}} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$. Skript: EA-Ermittlung/NumerikBsp_ModellUk0/diagnose_ExampleDel0.m . .	134
6.21. Zustandsmengenbeobachtung für $k_v = 2$ mit Parameterunsicherheit $\Delta_{a_{1,1}} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$. Skript: EA-Ermittlung/NumerikBsp_ModellUk0/diagnose_ExampleDel0.m . .	135
6.22. Störgrößenbeobachtung für $k'_v = 3$ mit Parameterunsicherheit $\Delta_{a_{1,1}} \in \{0, 0,2, 0,4, 0,6\}$	135
6.23. Vergleich von unterschiedlich verzögerten Einschließungen $k_v \in \{0, 1, 2\}$ für $\Delta_{a_{1,1}} = 0,1$	136
6.24. Vergleich von unterschiedlich verzögerten Einschließungen $k'_v \in \{1, 2, 3\}$ für $\Delta_{a_{1,1}} = 0,1$	137
6.25. Störgrößeneinschließung für zwei unterschiedliche Modelle mit unsicheren Parametern für $k'_v = 3$	137
7.1. Fehlerdetektion für ein System dritter Ordnung. Skript: Diagnose/diagnose_fehlermodelle03.m	140
7.2. Einschließungen der Zustandsgrößen für das wahre Fehlermodell $\mathcal{M}_{f_1}^*$. Skript: Diagnose/diagnose_30plus.m	141
7.3. Einschließungen der Zustandsgrößen für das Fehlermodell \mathcal{M}_{f_2} . Skript: Diagnose/diagnose_30plus.m	141
A.1. Polytope in \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung im \mathbb{R}^2 , links definiert durch seine Eckpunkte, rechts als Schnittmenge von Halbebenen. Skript: Anhang_A-Polytope/polyhedron VundH.m	151

A.2. Graph des Einheitswürfels. Volumen des Körpers Q , Flächen, Kanten und Eckpunkte	154
A.3. Bezeichnung von Algorithmen zur gegenseitigen Umwandlung von \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung	154
A.4. Polyeder mit Zielfunktion und unbeschränkten Richtungen	156
A.5. Benötigte Zeit zur Lösung von 1000 linearen Programmen der Dimension n mit M_p Ungleichungsbedingungen mit <i>linprog</i> (oben) und <i>glpk</i> (unten). Skript: <i>Anhang_A-Polytope/test_LPsolver.m</i>	157
A.6. Benötigte Zeit zur Lösung von 1000 linearen Programmen der Dimension n mit M_p Ungleichungsbedingungen <i>glpk</i> -Solver. Skript: <i>Anhang_A-Polytope/test_LPsolverGLPK.m</i>	158
A.7. Polytop mit reduzierter Dimension (Fläche in 3D).	160
A.8. Zwei Polytope (links) und ihre Minkowski-Summe (rechts)	162
A.9. Zwei Polytope (links) und ihre Pontryagin-Differenz (rechts)	162
A.10. Links: Zwei Punkte definieren eine Kante als konvexe Hülle, die gestrichelte Gerade ist die affine Hülle, die spitze Kegelfläche zwischen den Strahlen ist die konische Hülle. Rechts: Dreieck, Kegel, \mathbb{R}^2	164
A.11. Polyeder mit zwei Eckpunkten und Ausbreitungskegel	165
A.12. Projektion eines Polytops	167

A. Geometrie konvexer Polytope und Polyeder

In diesem Abschnitt wird eine anwenderorientierte Einführung in konvexe Polytope und Polyeder in beliebiger Dimension n gegeben. Algorithmen für die Ausführung wichtiger Operationen auf Polytopen und Polyedern, wie z.B. die Schnittbildung oder Transformationen, u.a. die Projektion, werden hier ohne Vollständigkeit genannt. Die gängigsten Formulierungen Linearer Programme (LPs) werden ebenfalls vorgestellt. Für Details zur Implementierung und Performanz wird im Wesentlichen auf die Literatur verwiesen. Praktische Aspekte mit dem Charakter einer Einführung werden diskutiert, um dem Anwender den Umgang mit Polytopen und Polyedern unter Verwendung von Toolboxen zu ermöglichen. Hier wird die Multi-Parametric Toolbox (MPT) [KGB04] für MATLAB [MAT15] vorgestellt, welche eine Vielzahl von Algorithmen zur Verfügung stellt und andere Projekte in Form von Toolboxen einbindet. Dies gilt auch für zuverlässige Löser von LPs.

Charakterisierung polytope und polyedrischer Mengen. Bei Polytopen und Polyedern handelt es sich um planar (eben) beschränkte Körper, die hier im \mathbb{R}^n behandelt werden. Im \mathbb{R}^2 sind die ebenen Randmengen Kanten, im \mathbb{R}^3 liegen die Randflächen auf Ebenen, während in höheren Dimensionen die Anschauung verloren geht.

Polytope sind beschränkte Mengen, während als Polyeder auch eben begrenzte, im Allgemeinen aber in bestimmten Richtungen unbeschränkte Mengen bezeichnet werden. Diese Unterscheidung wird in der Literatur nicht immer so eindeutig verwendet. Gelegentlich wird im Folgenden nur von Polytopen gesprochen und auf die spezielle Behandlung von Polyedern nur hingewiesen.

Konvexität. Eine Menge \mathcal{X} ist dann konvex, wenn für zwei beliebige Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in$

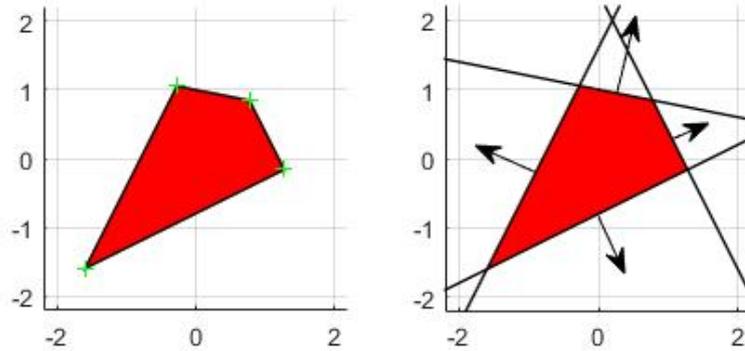


Bild A.1: Polytope in \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung im \mathbb{R}^2 , links definiert durch seine Eckpunkte, rechts als Schnittmenge von Halbebenen

\mathcal{X} aus der Menge, die sie verbindende Strecke vollständig in \mathcal{X} liegt:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X} \Rightarrow (1 - \lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X} \quad \forall \lambda \in [0 \dots 1] \quad (\text{A.1})$$

Konvexität wird im Folgenden immer vorausgesetzt. Probleme mit nichtkonvexen ebenflächig begrenzten Mengen können oft auf die Behandlung der Vereinigung endlich vieler konvexer Polyeder/Polytope zurückgeführt werden.

Unter der konvexen Hülle $\text{Conv}(\mathcal{V})$ einer Punktmenge \mathcal{V} versteht man die kleinste konvexe Menge überhaupt, welche \mathcal{V} vollständig enthält (siehe z.B. [Ros10]). Sie bietet sich an, um Polytope durch seine Eckpunkte zu beschreiben:

Darstellung konvexer Polytope. Polytope können durch die konvexe Hülle einer Punktmenge $\mathcal{V} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ angegeben werden. Bei dieser als \mathcal{V} -Darstellung bezeichneten Variante wird das Polytop durch Angabe seiner Eckpunkte erzeugt. Allerdings kann die Darstellung auch redundante Punkte im Inneren der Menge oder auf dem Rand, also auf den begrenzenden Hyperebenen besitzen:

Definition 10 (\mathcal{V} -Polytop)

Ein \mathcal{V} -Polytop im \mathbb{R}^n ist gegeben durch

$$\mathcal{X}_{\mathcal{V}} := \text{Conv}(\mathcal{V}) = \text{Conv}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \quad (\text{A.2})$$

mit $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$.

Durch konvexe Kombination der Eckpunkte \mathcal{V} eines Polytops mit den Parametern λ_i , welche als baryzentrische Koordinaten bekannt sind, erhält man einen Ausdruck für $\mathcal{X}_{\mathcal{V}}$:

$$\mathcal{X}_{\mathcal{V}} := \text{Conv}(\mathcal{V}) = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{x}_i \mid \forall i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\} \quad (\text{A.3})$$

Der Ausdruck (A.3) ermöglicht die Prüfung, ob ein Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ im Inneren des Polytops liegt. Dazu werden die Werte λ_i aus $N+1$ Gleichungen bestimmt, wobei N Gleichungen

aus der erzeugenden Summe für \mathbf{x} entstehen und zusätzlich die Summenbedingung für λ_i zu erfüllen ist. Der Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ liegt im Innern, wenn eine Lösung mit $0 \leq \lambda_i \leq 1$ für alle $i, 1 \leq i \leq N$, existiert.

Die *mpt-Toolbox* (Multi Parametric Toolbox) ist eine freie Open-Source Toolbox für MATLABTM. Sie umfasst eine ganze Reihe numerischer Löser für lineare, quadratische und viele andere Optimierungsprobleme. Geometrische Operationen sind unter anderem für Polytope im \mathbb{R}^n implementiert. Ein Objekt vom Typ Polyhedron kann z.B. durch Angabe der Eckpunkte erzeugt werden:

```
P=Polyhedron('V', V)
```

Darin stellen die Zeilen von V die Koordinaten der Eckpunkte dar. Im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 können Polytope grafisch dargestellt werden, wofür die überlagerte Plot-Funktion für die Klasse Polyhedron aufgerufen wird:

```
plot(P)
```

Die Prüfung, ob ein Punkt \mathbf{x} in einem Polytop enthalten ist erfolgt durch

```
P.contains(x)
```

Alle auf das Polytop anwendbaren Methoden können mit

```
methods(Polyhedron)
```

abgefragt werden.

Eine zweite Möglichkeit der Darstellung konvexer Polytope und auch Polyeder ist durch Angabe von Halbräumen durch Hyperebenen in Form von Ungleichungen gegeben. Im \mathbb{R}^2 handelt es sich dabei um Geraden, im \mathbb{R}^3 um Flächen, welche das Polytop begrenzen. Mit

$$\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{x} = \text{const.} = b \quad (\text{A.4})$$

wird im Allgemeinen eine solche Hyperebene (auch Facette genannt) im \mathbb{R}^n erzeugt. Ersetzt man das Gleichheitszeichen durch einen Vergleichsoperator, werden Halbräume definiert. In der normierten Darstellung $\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{x} \leq b$ ist \mathbf{n} der Normalenvektor, welcher bezüglich der Menge $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ nach außen zeigt (siehe Abb. A.1, rechts). Werden mehrere Ungleichungen in der Matrix \mathbf{M} und dem Vektor \mathbf{b} untereinander geschrieben, so ist das Polytop durch die Schnittmenge der Halbräume gegeben:

Definition 11 (\mathcal{H} -Polytop)

Ein \mathcal{H} -Polytop im \mathbb{R}^n ist gegeben durch

$$\mathcal{X}_{\mathcal{H}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}. \quad (\text{A.5})$$

Darin geben die k Zeilen \mathbf{m}_i^T der $[k \times n]$ -Matrix \mathbf{M} Richtungen im Zustandsraum an. Sie zeigen in Richtung der Normalenvektoren \mathbf{n}_i der k Hyperebenen (z.B. Flächen im \mathbb{R}^3), welche das Polytop begrenzen. Jede Ungleichung definiert einen Halbraum im \mathbb{R}^n und der Vektor \mathbf{m}_i zeigt bezüglich $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ nach außen. Die Schnittmenge aller Halbräume ist das Polytop. Auch hier können redundante Ungleichungen vorliegen, welche in der Anwendung algorithmisch zu eliminieren sind. Eine gegebene Darstellung (A.5) kann auch der leeren Menge entsprechen. Die \mathcal{H} -Darstellung lässt im Unterschied zur \mathcal{V} -Darstellung außerdem polyedrische Mengen zu.

Die Darstellung als \mathcal{H} -Polytop ist auch in irredundanter Form mehrdeutig, kann aber durch Normierung der Zeilen von (A.5) auf die Vektorlänge

$$\mathbf{m}_i \mapsto \mathbf{n}_i = \mathbf{m}_i / \|\mathbf{m}_i\| \quad (\text{A.6})$$

normiert werden.

Die *MPT-Toolbox* ermöglicht die Erzeugung von Objekten vom Typ 'Polyhedron' wie folgt:

```
P = Polyhedron('H', [M, b]) % oder
P = Polyhedron('A', M, 'b', b)
```

In Normalform transformiert man das Polytop mit

```
P.normalize();
```

Um dies zu überprüfen, erhält man die gespeicherte Beschreibung mit

```
M2 = P.A; b2 = P.b % oder H=P.H
```

Geometrische Beschreibung von Polytopen. \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung konvexer Polytope enthalten implizit vollständig die geometrischen Informationen über das Objekt. Je nach Anwendung ist man aber explizit an geometrischen Informationen interessiert, wie beispielsweise welche Eckpunkte jeweils Kanten des Polytops bilden. Objekte, welche ein Polytop nach außen hin begrenzen, werden im Folgenden als Seiten (face) bezeichnet. Die Angabe englischer Begriffe erscheint aufgrund der zur Verfügung stehenden Literatur sinnvoll. Die folgende Tabelle listet diese Begriffe auf:

Dimension	Bez. der Seiten	Englisch, faces	3-D	2-D
n	-	-	Volumen	Fläche
n-1	Facette/Hyperebene	facet	Fläche	Kante
n-2	n-2-Seite	ridge	Kante	Eckpunkt
⋮				
2			Fläche	Fläche
1	Kante	edge	Kante	Kante
0	Eckpunkt	vertex	Eckpunkt	Eckpunkt

Die vollständige Information über die Randgeometrie des Polytops enthält der Seiten-Graph, welcher in Abb. A.2 für das Beispiel des Quaders dargestellt ist. Das Beispiel ist [JKoCEDM04] entnommen. Die beiden Darstellungsformen \mathcal{V} - bzw. \mathcal{H} -Polytop sind immer durch die oberste bzw. unterste Ebene des Graphen gegeben. Da das Beispiel im

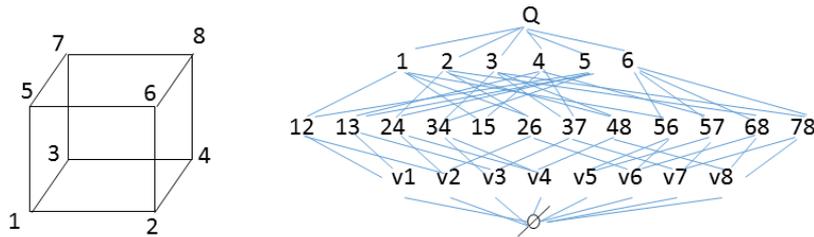


Bild A.2: Graph des Einheitswürfels. Volumen des Körpers Q , Flächen, Kanten und Eckpunkte

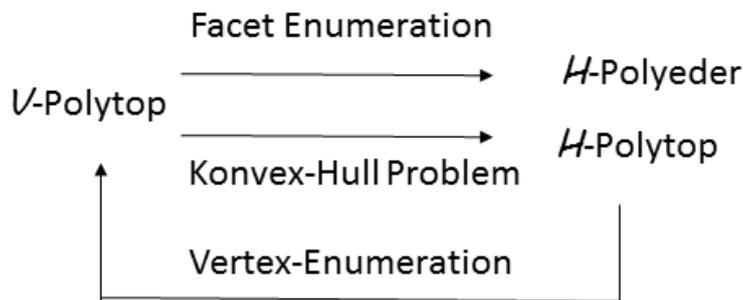


Bild A.3: Bezeichnung von Algorithmen zur gegenseitigen Umwandlung von \mathcal{V} - und \mathcal{H} -Darstellung

\mathbb{R}^3 angeordnet ist, liegt dazwischen nur die Aufzählung der zwölf Kanten des Würfels. Jedes \mathcal{V} -Polytop kann in ein \mathcal{H} -Polytop umgeformt werden. Ist ein \mathcal{H} -Polyeder beschränkt, dann kann es ohne Erweiterung der Darstellungsform als \mathcal{V} -Polytop beschrieben werden. Die algorithmische Vorgehensweise ist dabei keineswegs trivial und findet unter Verwendung der strukturellen Eigenschaften des Polytops statt, welche in Form des Seiten-Graphen dargestellt sind. Abb. A.3 listet die Begriffe auf, welche im Zusammenhang mit dem Konvertierungsproblem auftauchen. Zu diesem Thema soll hier nur auf die Literatur verwiesen werden [Zie95], [GO04]. Nach [Fuk04] ist im allgemeinen Fall kein Algorithmus mit polynomialer Laufzeit (bezogen auf die Anzahl der Kanten) bekannt, um die Darstellungen ineinander umzuwandeln. Es ist noch Gegenstand der Forschung, welche Algorithmen das Problem in unterschiedlichen Dimensionen bestmöglich lösen. Je nach Anwendung kann das algorithmische Ziel auch in der vollständigen Ermittlung des Graphen bestehen. Stichworte zu Algorithmen sind in [Kom16] gegeben.

Schon zur grafischen Darstellung ($n \leq 3$) ist es erforderlich die Eckpunkte des Polytops zu berechnen, weshalb eine solche Berechnung bei Verwendung des Plot-Befehls angestoßen wird. Dies kann auch durch das Auslesen der Werte erzwungen werden:

```
V=P.V; \% Wiedergabe der Eckpunkte als Zeilen von V
```

Lineare Optimierung (Lineare Programme, LPs). Als lineares Programm wird

die folgende lineare Optimierungsaufgabe bezeichnet:

$$V_{max} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{s.d. } \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (\text{A.8})$$

An Stelle der allgemeinen Zielfunktion f ist der Vektor \mathbf{c} gegeben:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.9})$$

Der zulässige Bereich ist durch ein lineares Ungleichungssystem (Nebenbedingung, Gl.(A.8)), also offensichtlich durch eine polyedrische Menge gegeben. Da im Allgemeinen auf der Menge \mathcal{X} gilt

$$\min_{\mathcal{X}}(f(\mathbf{x})) = -\max_{\mathcal{X}}(-f(\mathbf{x})), \quad (\text{A.10})$$

kann im Speziellen auch jedes lineare Programm als Maximierungsproblem dargestellt werden.

Die Lösung V_{max} tritt an der Stelle \mathbf{x}_{max} auf, welche im zulässigen Bereich liegen muss. Jedes lineare Programm (LP) lässt sich in die Form (A.7), (A.8) überführen, was später noch gezeigt wird. In anderer Darstellung kann für LPs zusätzlich eine Beschränkung der Zielvariablen auf elementweise Positivität ($\mathbf{x} \geq 0$) formuliert sein. Diese Standardform (siehe [GO04]) wird zumeist als Ausgangspunkt für algorithmische Zwecke bevorzugt. Außerdem resultiert $\mathbf{x} \geq 0$ oft bei Anwendungen aus der logischen oder physikalischen Positivität der Variable, z.B. wenn ein x_i für einen Wareneinsatz steht. In der Literatur (u.a. [Gro03]) wird gelegentlich die folgende Darstellung angegeben, wobei Mischformen mit Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen ebenfalls möglich sind:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.11})$$

$$\text{s.d. } \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.12})$$

Das Problem (A.11) lässt sich leicht in die Darstellung (A.7), (A.8) umformen, was zunächst gezeigt werden soll, bevor der umgekehrte Weg beschrritten wird. Dazu wird ausgenutzt, dass jede Gleichung ($a = b$) durch zwei Ungleichungen ($a \leq b$ und $a \geq b$) geschrieben werden kann. Für den zulässigen Bereich erhält man insgesamt das Ungleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \\ -\mathbf{I}_{[n \times n]} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Hat man umgekehrt die Form (A.7), (A.8) gegeben und möchte die Darstellung nach (A.11) erhalten, so lassen sich die Ungleichungen durch Einführung sogenannter Schlupfvariablen \mathbf{s} entfernen. Damit wird die Dimension des Lösungsraums pro Ungleichung um eins erhöht:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b} \quad (\text{A.14})$$

Für jede unbeschränkte Variable führt man die Differenz $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$ ein. Die neuen Vektoren können elementweise positiv sein, ohne den Wertebereich von \mathbf{x} zu beschränken. Auch diese Umformung erhöht die Dimension des Lösungsraumes. Wenn man sie

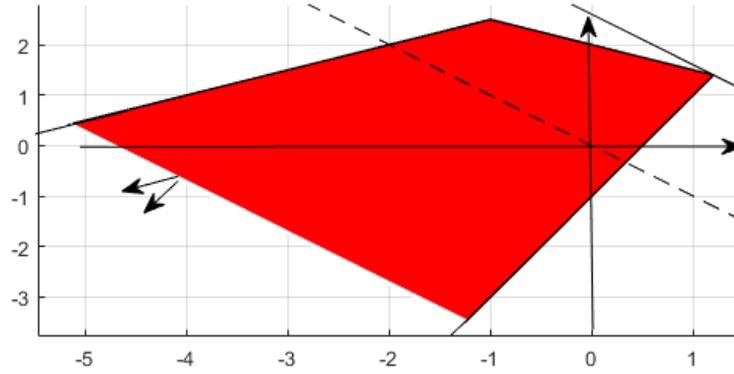


Bild A.4: Polyeder mit Zielfunktion und unbeschränkten Richtungen

für alle Komponenten von \mathbf{x} durchführt, auch wenn eventuell redundante Ungleichungen entstehen, erhält man:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (\mathbf{c}^T, -\mathbf{c}^T, \mathbf{0}) \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{s.d. } \underbrace{(\mathbf{M} \quad -\mathbf{M} \quad \mathbf{I})}_{\tilde{\mathbf{M}}} \cdot \underbrace{(\mathbf{x}^+ \mathbf{x}^- \mathbf{s})^T}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.16})$$

Lösung und Lösungsverfahren für lineare Programme. Neben der linearen Zielfunktion sind LPs dadurch gekennzeichnet, dass der zulässige Bereich (gegeben durch die Nebenbedingungen) in jedem Fall eine polytope oder polyedrische Menge $\mathbf{x}_{max} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ darstellt. Die Lösung ist in $\mathcal{X} \neq \emptyset$ enthalten, wenn der zulässige Bereich nicht leer ist. Als Lösung kann auch ein Unendlichkeitswert entstehen, wenn der zulässige Bereich nicht beschränkt ist.

Es stellt sich heraus, dass die Lösung \mathbf{x}_{max} auf dem Rand des Polytops zu finden ist bzw. auf den Eckpunkten des Polytops, wenn die Lösung eindeutig ist.

Für $n = 2$ Variablen kann das Problem grafisch gelöst werden, indem der zulässige Bereich gezeichnet wird und anschließend die Zielfunktion als Gerade durch den zulässigen Bereich parallel verschoben wird, bis der Funktionswert sein Optimum annimmt.

Abb. A.4 zeigt beispielhaft das Polyeder mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

wobei die Richtung der Zielfunktion $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ gestrichelt angedeutet ist und auf das Maximum $f_{max} = 2.6$, welches am Eckpunkt $\mathbf{x}^T = (1, 2 \quad 1, 4)$ auftritt, verschoben wurde.

Im Prinzip ist es möglich, die \mathcal{V} -Darstellung des zulässigen Bereichs eines linearen Programms oder die Eckpunkte des polyedrischen Bereichs zu berechnen, und damit die Zielfunktion auszuwerten. In manchen Anwendungen treten Probleme für sehr große n und einer großen Anzahl an Hyperebenen auf, so dass die Vorgehensweise nicht ausreichend ist. Algorithmisch effizienter lässt sich mit der Simplex-Methode, der dualen Simplexmethode, der Ellipsoidmethode oder nach Karmakar (siehe [Gro03]) eine

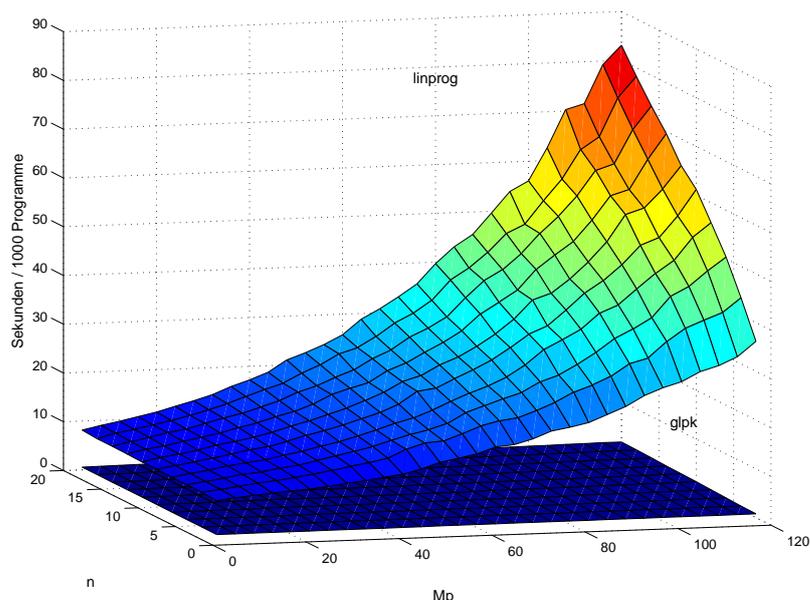


Bild A.5: Benötigte Zeit zur Lösung von 1000 linearen Programmen der Dimension n mit M_p Ungleichungsbedingungen mit *linprog* (oben) und *glpk* (unten)

Lösung berechnen. Weiteren Algorithmen wie Innere-Punkt-Methoden stehen zur Verfügung [GO04].

Löser für lineare Programme können versagen, wenn das Problem schlecht konditioniert ist. Deshalb empfiehlt es sich den zulässigen polytopen Bereich entsprechend Gl. (A.6) zu normieren, wenn dieser Schritt nicht integraler Bestandteil des verwendeten Algorithmus ist.

Die *MATLAB*TM-Funktion *linprog* (Teil der *Optimization Toolbox*) löst das Problem, welches in den unterschiedlichsten hier dargestellten Formen vorliegen kann. Das Problem ist als Minimierungsaufgabe zu formulieren. Die Verwendung verschiedener Algorithmen kann eingestellt werden, z.B. die Dual-Simplex-Methode, welche auch das duale Problem zur Lösung verwendet [MAT15]. Die *mpt-Toolbox* bindet eine ganze Reihe von Projekten zur Lösung numerischer Probleme ein, womit eine ganze Reihe alternativer Löser für lineare Programme zur Verfügung steht.

```
[x,f_neg]=linprog(-[1,1], M,b) % f_neg ==-f ist vorzeichenverkehrt
\% In der Dokumentation zur mpt-Toolbox [KGB04]
\% wird die linprog-Implementierung
\% kritisiert bezüglich ihrer Zuverlässigkeit und Geschwindigkeit.
\% Die mpt-Toolbox stellt die folgende Funktion zur Verfügung, wobei hier
\% beispielhaft nur die Ungleichungsbeschränkungen genutzt werden:
[xopt,fval,lambda,exitflag,how]=mpt_solveLP(-c,M,b,[],[],[],4,[],[])
\% Der zu verwendende Löser wird über das Konfigurationsfile mpt_solveLP.m
\% eingestellt werden.
```

Lineare Programme lassen sich mit dem von *MATLAB*TM in der *Optimization-Toolbox* zur Verfügung gestellte Algorithmus (*linprog*) lösen. Eine schnellere Lösung bietet der in

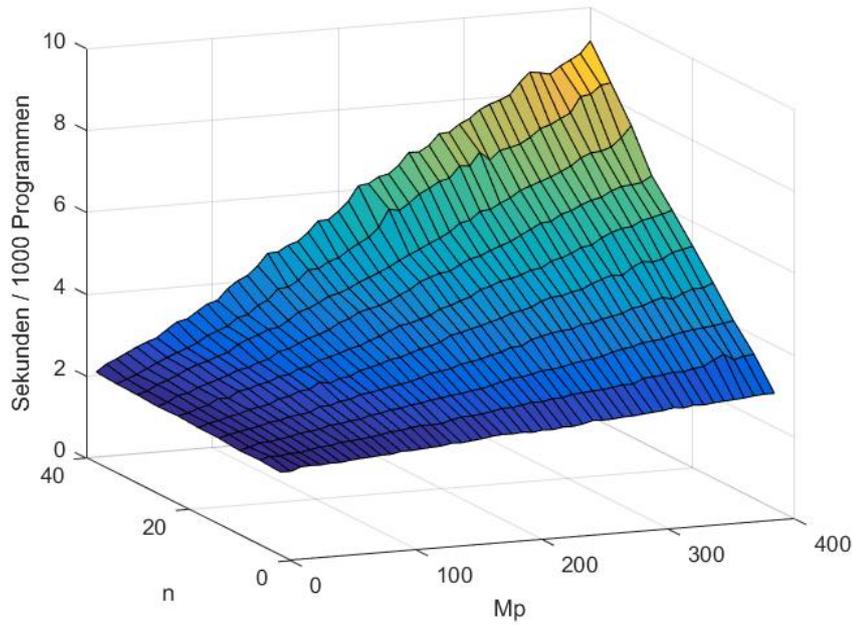


Bild A.6: Benötigte Zeit zur Lösung von 1000 linearen Programmen der Dimension n mit M_p Ungleichungsbedingungen *glpk*-Solver.

C++ programmierte Löser *glpk*, der in MATLABTM leicht über eine MEX-Schnittstelle eingebunden werden kann. Der Löser ist auch Teil der *mpt*-Toolbox Abb. A.5 zeigt ein numerisches Experiment, bei dem lineare Programme aus Zufallszahlen generiert werden und mit beiden Lösungsverfahren bearbeitet werden. Der mittlere zeitliche Aufwand steigt mit der Anzahl an auszuwertenden Ungleichungsbedingungen M_p sowie mit der Dimension n des Problems. Der *glpk*-Löser benötigt im Mittel für ein Problem mit $n = 10$ Unbekannten und $M_p = 100$ Ungleichungen 1.086 MilliSekunden auf einem PC mit Intel Core2 Duo CPU, 2.19 Ghz, 1.95 GB RAM mit MATLAB R2009a. Abbildung A.6 zeigt weitere Ergebnisse für den *glpk*-Solver. Hier werden 1000 Probleme im \mathbb{R}^{40} auf Polytopen mit 400 Ungleichungen in weniger als 10 Sekunden gelöst.

Erweiterte Anwendung von LPs, Chebyshev-Zentrum. Eine Reihe von Problemen, welche auf den ersten Blick nicht als LPs erscheinen, können auf diese zurückgeführt werden. Diese Fälle und die dafür notwendigen Umformungen werden in [BV04] behandelt. Dazu zählt unter Anderem die Ermittlung des inneren Radius eines Polytops, also der Radius r der größten, in einem konvexen Polytop \mathcal{P} enthaltenen Kugel \mathcal{B} :

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_c + \mathbf{u} \mid |\mathbf{u}| \leq r\} \quad (\text{A.18})$$

Darin wird \mathbf{x}_c als Chebyshev-Center bezeichnet (, worunter aber manchmal auch das Zentrum einer minimalen, äußeren Kugel bezeichnet wird). Das Problem lautet

$$\max_{\mathbf{x}_c, r} \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \leq r, \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}. \quad (\text{A.19})$$

Betrachtet man zunächst das Problem, dass die Kugel in einem Halbraum $\mathbf{m}_i^T \mathbf{x} \leq b_i$ liegen muss, dann folgt mit $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_c$

$$\mathbf{m}_i^T \cdot (\mathbf{x}_c + \mathbf{u}) \leq b_i. \quad (\text{A.20})$$

Mit

$$\max\{\mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{u}, |\mathbf{u}| \leq r\} = r|\mathbf{m}_i| \quad (\text{A.21})$$

wird aus der Forderung (A.20)

$$\mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{x}_c + |\mathbf{m}_i|r \leq b_i \quad (\text{A.22})$$

eine lineare Ungleichung in $(\mathbf{x}_c^T, r)^T$. Zusammengefasst für alle i stellt sich das Problem wie folgt dar:

$$\max_{(\mathbf{x}^T, r)^T \in \mathbb{R}^{n+1}} r \quad (\text{A.23})$$

$$\text{s.d. } \mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{x}_c + |\mathbf{m}_i|r \leq b_i \quad \forall i \quad (\text{A.24})$$

Das Problem (A.23) dient nach [Bao09] zur Prüfung der vollen Dimensionalität von Polytopen (siehe den folgenden Abschn.), da andernfalls der Radius verschwindet, sowie zur Ermittlung eines inneren Punktes. Die Betrachtung eines Rechtecks verdeutlicht, dass die größte innere Kugel (hier ein Kreis) und damit das Zentrum nicht eindeutig sein muss. Mit der *mpt*-Toolbox erhält man eine Datenstruktur die neben dem Radius das Chebyshev-Zentrum in diesem Fall als Intervall angibt:

```
data = P.chebyCenter()
\% data =
\%
\% struct with fields:
\%
\% exitflag: 1
\% x: \[2x1 double\]
\% r: 0.7639
```

Dimensionsabfall in polytope Darstellung. Man kann sich leicht vorstellen, dass im \mathbb{R}^3 ein Polytop durch Eckpunkte gegeben ist, welche alle in einer Ebene liegen. Damit verschwindet das Volumen des Polytops einerseits, andererseits kann trotzdem eine Darstellung als \mathcal{H} -Polytop angegeben werden, welche eine nichtleere Lösungsmenge aufweist. Wenn man in der \mathcal{H} -Darstellung auch Gleichungen zulässt, so kann damit ein Dimensionsabfall formuliert werden. Eine Gleichung

$$\mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{x} = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{x} \leq b \\ -\mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{x} \leq -b \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

genügt beispielsweise, um eine Ebene im \mathbb{R}^3 mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}_i = \mathbf{m}_i / \|\mathbf{m}_i\|$ darzustellen, welche dann durch weitere Ungleichungen auf eine Fläche begrenzt sein kann, wie in Abbildung A.7 dargestellt ist.

Das (verallgemeinerte) Volumen konvexer Polytope kann wie folgt berechnet werden:

```
P.volume()
```

Für Flächen im \mathbb{R}^2 erhält man den Flächeninhalt. Stellt ein Polytop lediglich eine Fläche im \mathbb{R}^3 dar, so verschwindet sein Volumen. Trotzdem ist die Menge nicht leer:

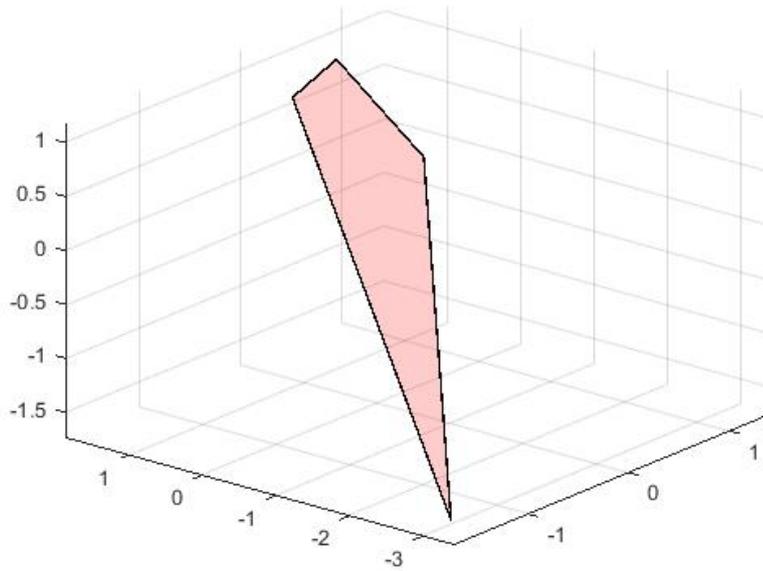


Bild A.7: Polytop mit reduzierter Dimension (Fläche in 3D)

```
P.isemptySet() % = false
```

Dies liegt am Dimensionsabfall der wie folgt geprüft werden kann

```
P.isFullDim() % = false
```

Mengenoperationen (für \mathcal{H} -Polytope). Im Folgenden werden Operationen aufgeführt, welche auf konvexe Polytope angewendet werden. Dabei lässt sich die Schnittbildung auf natürliche Weise in \mathcal{H} -Darstellung ausführen. Für \mathcal{V} -Polytope wäre zunächst die \mathcal{H} -Darstellung zu berechnen und nach der Schnittbildung die inverse Transformation durchzuführen. Die Entfernung redundanter Ungleichungen wird angesprochen, welche nach Bildung der Schnittmenge durchgeführt werden muss. Die Bildung der Minkowski-Summe, der Pontryagin-Differenz sowie lineare und affine Abbildungen einschließlich der Projektion führen wieder auf komplexe Polytope. Der Fokus liegt darauf, diese Operationen für \mathcal{H} -Polytope auswerten zu können.

Schnittbildung. Die Menge der konvexen Polytope ist bezüglich der Operation Schnittbildung abgeschlossen, d.h. man erhält als Ergebnis wieder ein konvexes Polytop. Zur Durchführung der Operation bietet sich auf natürliche Weise die \mathcal{H} -Darstellung der Polytope $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ an, welche nur das Untereinanderschreiben der Ungleichungsbedingungen der Operanden erfordert:

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \end{pmatrix} \right\}. \quad (\text{A.26})$$

Dabei entsteht im Allgemeinen eine Vielzahl redundanter Ungleichungen, die durch die Lösung linearer Programme wie im folgenden Abschnitt beschrieben beseitigt werden können (siehe z.B. [GO04], [Fuk04]).

Sollte die Operation mit \mathcal{V} -Darstellung durchgeführt werden, bedeutet das einen deutlich höheren Rechenaufwand. Eine offensichtlich aufwendige Möglichkeit wäre es, zunächst die \mathcal{H} -Darstellung der Operanden zu ermitteln und nach durchgeführter Schnittbildung die Eckpunkte des Ergebnispolytops zu bestimmen. Auch wenn Implementierungen diesbezüglich optimiert sind, kann die Effizienz für die \mathcal{H} -Darstellung nicht erreicht werden. Da bei der Zustandsmengenbeobachtung regelmäßig die Schnittmenge von Polytopen/Polyedern gebildet wird, ist dieser Aspekt wesentlich für die eingesetzte Methode.

Entfernung redundanter Ungleichungen. Hier wird vorausgesetzt, dass das Polytop nach Gl.(A.5) in \mathcal{H} -Darstellung gegeben ist, wobei möglicherweise Zeilen $\mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{x} \leq b_i$ existieren, deren Streichung $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ nicht verändert. Der Algorithmus löst nun für jede Zeile $1 \leq i \leq N$ von \mathbf{M} das folgende lineare Programm, um zu entscheiden, ob die Ungleichung wegen Redundanz entfernt werden kann, oder nicht:

$$V_i = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.27})$$

$$\text{s.d. } \mathbf{m}_j^T \cdot \mathbf{x} \leq b_j \quad \forall j \leq k, j \neq i \quad (\text{A.28})$$

$$\text{und } \mathbf{m}_i^T \cdot \mathbf{x} \leq b_i + 1 \quad (\text{A.29})$$

Geometrisch interpretiert wird in Richtung \mathbf{m}_i eine Überapproximation durchgeführt, wobei die Ungleichungsbedingung i selbst gelockert wird. Die Lösung V_i wird mit b_i verglichen. Für $V_i \leq b_i$ ist die Ungleichung redundant und wird entfernt.

```
P.computeHRep() % kann aufgerufen werden um eine H-Darstellung
% zu berechnen, falls P als V-Darstellung vorliegt. Mit
P.minHRep()
% wird aus einer redundanten eine irredundante Darstellung
% ermittelt. Analog dazu werden innere Punkte entfernt:
P.minVRep()
```

Minkowski-Summe und Pontryagin-Differenz. Die hier eingeführten Mengenoperationen werden häufig lediglich als Addition oder Subtraktion bezeichnet (einschließlich der Verwendung der bekannten Rechensymbole). Als Ergebnis erhält man wieder konvexe Polytope:

Definition 12 (*Minkowski-Summe*)

Sind $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$, dann ist die Minkowski-Summe gegeben durch

$$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} := \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}. \quad (\text{A.30})$$

Der Operator \oplus ist kommutativ und assoziativ.

Definition 13 (*Pontryagin-Differenz*)

Sind $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$, dann ist die Pontryagin-Differenz gegeben durch

$$\mathcal{X} \ominus \mathcal{Y} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} + \mathbf{y} \in \mathcal{X} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}. \quad (\text{A.31})$$

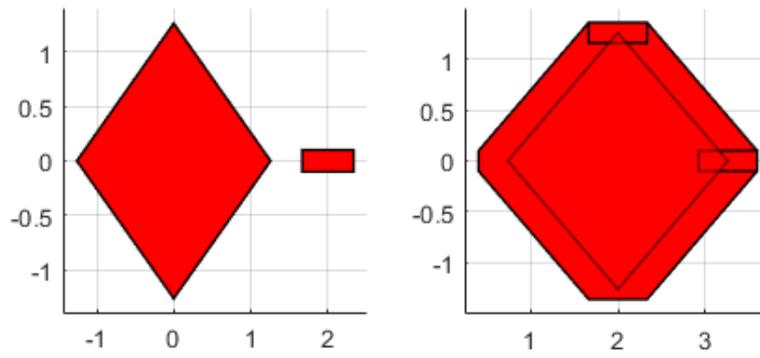


Bild A.8: Zwei Polytope (links) und ihre Minkowski-Summe (rechts)

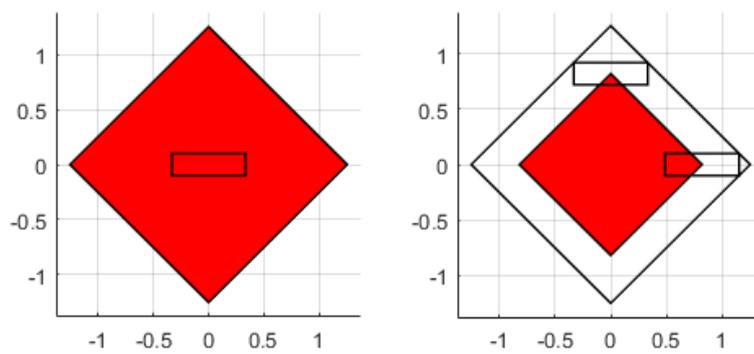


Bild A.9: Zwei Polytope (links) und ihre Pontryagin-Differenz (rechts)

Die Pontryagin-Differenz ist nicht komplementär zur Minkowski-Summe, sondern es gilt nach [BM08] lediglich

$$(\mathcal{X} \ominus \mathcal{Y}) \oplus \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}. \quad (\text{A.32})$$

Eine Möglichkeit zur Berechnung der Minkowski-Summe besteht darin, in \mathcal{V} -Darstellung die Summe aller Eckpunkte der verschiedenen Polytope zu berechnen und anschließend davon die konvexe Hülle zu bilden. Dieses Verfahren ist im Allgemeinen zu aufwendig. In [dBvKOS00] wird für den Anwendungsfall im \mathbb{R}^2 die Minkowski-Summe berechnet, wobei als geometrische Information eine Sortierung der Punkte im Uhrzeigersinn vorausgesetzt wird. Im Allgemeinen kann die Auswertung der Minkowski-Summe (A.30) und der Pontryagin-Differenz (A.31) für konvexe Polytope durch Standard-Software (u.a. [Ker05] in MATLABTM, siehe [Ker00]) auf der Basis linearer Programme erfolgen. Nach [JKoCEDM04] ist die algorithmische Komplexität mit der der Projektion (s.u.) identisch.

`\%` Auf Objekte der Klasse Polyhedron können die überlagerten Operatoren + bzw. - oder die gleichnamigen Funktionen angewendet werden.

Darstellung von Polyedern. In der Literatur wird nachgewiesen, dass unbeschränkte Polyeder immer dargestellt werden können als die Minkowski-Summe aus einem konvexen Polytop (also aus einer beschränkten Darstellung) und einem Polyederkegel (ebenflächiger Kegel) [Sch04], [EB75]. Dazu werden zunächst weitere Darstellungen eingeführt, welche Klassen von Polyedern darstellen:

Betrachtet man die lineare Kombination von Punkten (vgl. die baryzentrischen Koordinaten nach Gl. (A.2)) etwas genauer, so erhält man für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ lineare Räume, welcher durch die Vektoren $\mathbf{x}_i - \mathbf{0}$ aufgespannt werden:

$$\mathcal{X} := \text{Linear}(\mathcal{V}) = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{x}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{A.33})$$

Unter Einschränkungen erhält man die konische und die affine Hülle:

Definition 14 (*Polyedrischer Kegel (konische Hülle)*)

$$\mathcal{X} := \text{Cone}(\mathcal{V}) = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{x}_i \mid \lambda_i \geq 0, \right\} = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \} \quad (\text{A.34})$$

Der polyedrische Kegel weist neben dem Eckpunkt im Ursprung die durch \mathbf{x}_i definierten Strahlen auf. Der Anschauung nach ist ein Kegel spitz (im Ursprung), der mathematische Kegel muss diese Eigenschaft aber nicht aufweisen, wenn beispielsweise die Komplementmenge eines spitzen Kegels gemeint ist.

Definition 15 (*Affine Hülle*)

$$\mathcal{X} := \text{Aff}(\mathcal{V}) = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{x}_i \mid \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\} = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b} \} \quad (\text{A.35})$$

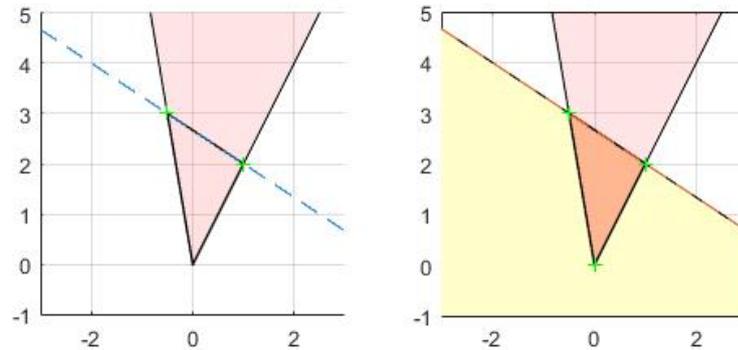


Bild A.10: Links: Zwei Punkte definieren eine Kante als konvexe Hülle, die gestrichelte Gerade ist die affine Hülle, die spitze Kegelfläche zwischen den Strahlen ist die konische Hülle. Rechts: Dreieck, Kegel, \mathbb{R}^2

Die affine Hülle definiert Unterräume des \mathbb{R}^n für $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ bzw. andernfalls affin dazu verschobene Räume.

Ein \mathcal{H} -Polyeder besitzt nur dann überhaupt Ecken, wenn die Matrix \mathbf{M} vollen Spaltenrang hat (siehe [Sch04]). Im Folgenden wird das Beispieldpolytop (A.17) erneut betrachtet. Nach [Sch04] ist \mathbf{x} genau dann ein Eckpunkt des konvexen Polyeders \mathcal{X} , wenn es eine reguläre $[n \times n]$ -Untermatrix $\mathbf{M}^{(J)}$ gibt mit $\mathbf{M}^{(J)} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(J)}$ und $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Im Beispiel sind $\binom{m}{n} = \binom{4}{2} = 6$ Kombinationen von Zeilen zu Untermatrizen möglich.

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = (1.2 \ 1.4)^T \in \mathcal{X} \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = (-1 \ 2.5)^T \in \mathcal{X} \quad (\text{A.37})$$

Für die vier weiteren möglichen Untermatrizen liegt die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nicht innerhalb des Polyeders, welches damit nur zwei Eckpunkte aufweist.

$$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} \quad (\text{A.38})$$

stellt den Ausdehnungskegel von \mathcal{X} dar, wie hier im Beispiel in Abb. A.11 dargestellt.

```
%In der mpt-toolbox wird eine Darstellungsmöglichkeit durch Eckpunkte
%bei zusätzlicher Angabe von Ausdehnungsrichtungen (Rays) versucht,
%welche allerdings fehlerhaft ist. Die V-Darstellung der Toolbox
%sollte für Polyeder gemieden werden. Eine gegebene H-Repräsentation
%kann aber problemlos auf Beschränktheit getestet werden:
P.isBounded()
```

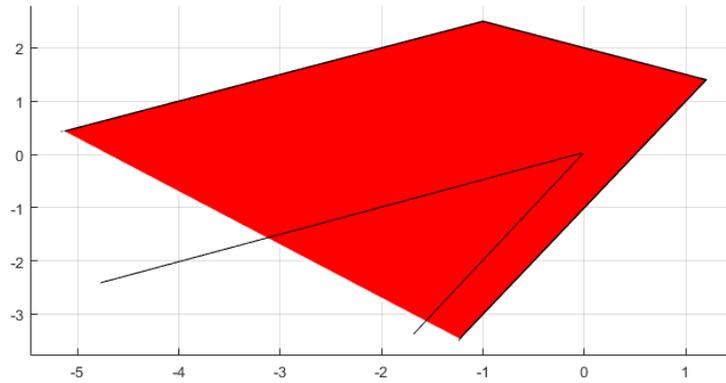


Bild A.11: Polyeder und Ausbreitungskegel

Translation. Als Spezialfall der im Folgenden beschriebenen allgemeinen Abbildung soll das Polytop hier um den Vektor \mathbf{a} verschoben werden, also

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a} \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'\}, \quad (\text{A.39})$$

so erhält man für die \mathcal{H} -Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{\mathbf{x} \mid \exists \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \text{ s.d. } \mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{x}'\} \\ &= \{\mathbf{x} \mid \mathbf{M}'(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq \mathbf{b}'\} \\ &= \{\mathbf{x} \mid \mathbf{M}'\mathbf{x} \leq \underbrace{\mathbf{b}' + \mathbf{M}'\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

mit der neuen rechten Seite \mathbf{b} .

Abbildung mit Matrizen. Als Nullraum einer $[n \times m]$ Matrix bezeichnet man

$$\text{kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}. \quad (\text{A.41})$$

Der Nullraum ist der Teil des Urbildraumes, welcher auf den Ursprung des Systems abgebildet wird. Für eine reguläre Matrix \mathbf{A}_r gilt $\text{kern}(\mathbf{A}_r) = \mathbf{0}$. Ein Teil des Bildraumes ist das Bild

$$\text{imag}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m \text{ s.d. } \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{x}\} \quad (\text{A.42})$$

Das Bild einer Matrix ist orthogonal zum Kern ihrer Transponierten.

V = null(A) % Nullraum

W = orth(A) % Bild

Abbildung von Polytopen. Die Transformation eines Polytops \mathcal{X}' , mit der Matrix \mathbf{A} soll im Folgenden betrachtet werden, wobei \mathbf{A} im Allgemeinen nicht quadratisch und invertierbar sein muss: $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$.

Aus der Computergrafik ist bekannt (u.a. [Str04]), dass bei der punktweisen Transformation $\mathcal{X} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{X}'$ die Normalenvektoren mit der inversen (und je nach Multiplikationsrichtung noch transponierten) der Transformationsmatrix abgebildet werden,

wenn diese existiert. Dieser Spezialfall ist also für $m = n$ mit quadratischer und nicht-singulärer Matrix \mathbf{A} gegeben und lässt sich wie folgt motivieren:

$$\mathcal{X}' = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'\} \quad (\text{A.43})$$

Mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}$ erhält man die Beschreibung des Bildpolytops:

$$\mathcal{X} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\mathbf{M}'\mathbf{A}^{-1}}_M \mathbf{x} \leq \mathbf{b}'\} \quad (\text{A.44})$$

Abbildung mit nicht-regulären Matrizen I. Wenn die Matrix \mathbf{A} nicht invertierbar ist, kann im Allgemeinen wie folgt vorgegangen werden: Das Bildpolytop wird umformuliert zu

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'\} \quad (\text{A.45})$$

$$= \{\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}' = 0 \mid \exists \mathbf{x}' \in \mathcal{X}'\}. \quad (\text{A.46})$$

Daraus folgt die Darstellung im erweiterten Zustandsraum mit $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^T \in [\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n]$ (siehe [Ker05]), wobei die Gleichheit in (A.45) durch die ersten beiden Zeilen in (A.47) beschrieben, also jede Gleichung durch zwei Ungleichungen ersetzt wurde:

$$\mathcal{P} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{x}')^T \mid \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{A.47})$$

mit

$$\mathcal{X} = Proj_{\mathbb{R}^m} \mathcal{P} \quad (\text{A.48})$$

Dabei steht der $Proj_{\mathbb{R}^m}$ -Operator für die achsenparallele Projektion (Parallelprojektion) auf den Unterraum \mathbb{R}^m und wird im Folgenden noch erläutert.

Parallelprojektion von Polytopen. Als Beispiel für die Projektion eines \mathcal{V} -Polytops ($\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$), wobei der Bildraum durch die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und \mathbf{e}_4 aufgespannt sein soll, werden alle Eckpunkte mit der $[3 \times 4]$ -Matrix wie folgt abgebildet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Dabei entstehen im Allgemeinen Bildpunkte $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ im Inneren der Bildmenge, welche für Anwendungen in der Computergrafik relevant sein können. Interessiert man sich lediglich für eine normierte Darstellung des \mathcal{V} -Polytops im Bildraum, so sind diese Punkte algorithmisch zu entfernen.

Die achsenparallele Projektion stellt eine Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m < n$ dar und wird durch den Operator $\mathcal{X} = Proj_{\mathbb{R}^m} \mathcal{X}'$ symbolisiert. Bei gegebener \mathcal{H} -Darstellung ist die Auswertung weniger anschaulich. Für den Spezialfall $m = 1$ erhält man das Intervall $[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ mit

$$\underline{x}_i = \min_{\mathcal{X}'} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}_i = \max_{\mathcal{X}'} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}. \quad (\text{A.50})$$

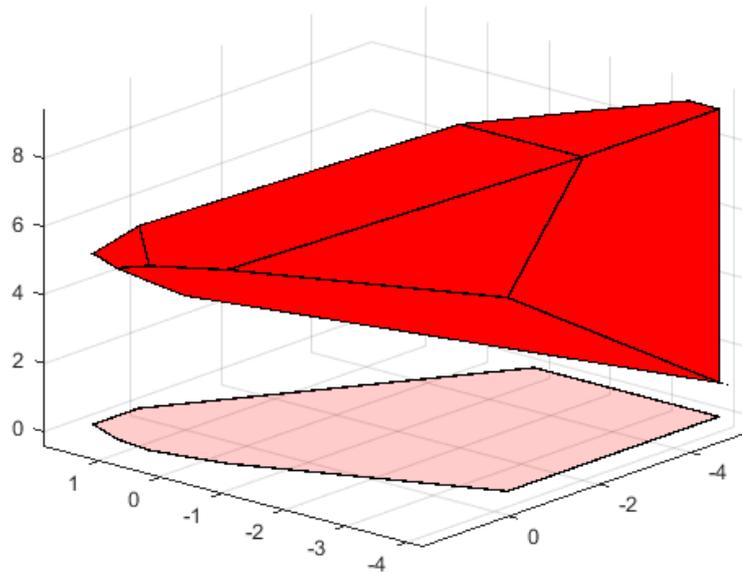


Bild A.12: Projektion eines Polytops

Um diese eindimensionale Projektion auszuwerten sind also zwei lineare Programme lösen. Leider kann die Vorgehensweise nicht verallgemeinert werden, da die Normalenvektoren des Bildpolytops zunächst nicht bekannt sind. Die Vorstellung, dass im Unterraum ein Polytop, begrenzt durch Hyperebenen mit den projizierten Normalenvektoren von \mathcal{X}' entsteht, ist falsch.

Eine Vorgehensweise zur Berechnung der Projektion wird in [JKM08] vorgestellt, wo von der Zerlegung des Polytops

$$\mathcal{X} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m-n} \mid (\mathbf{C} \ \mathbf{D}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \leq \mathbf{b}\} \quad (\text{A.51})$$

ausgegangen. Der Projektionskegel wird wie folgt definiert:

$$W =: \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m-n} \mid \mathbf{D}^T \mathbf{w} = \mathbf{0}\} \quad (\text{A.52})$$

Das Gleichungssystem wird zunächst gelöst. Die Projektion ist dann

$$\text{Proj}_{\mathbb{R}^m} \mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-n} \mid \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \leq \mathbf{w}^T \mathbf{b} \ \forall \mathbf{w} \in W\} \quad (\text{A.53})$$

Die achsenparallele Projektion kann prinzipiell für \mathcal{H} -Polytope mit Hilfe des Fourier-Motzkin-Algorithmus ausgewertet werden [Gro03]. Dieses Verfahren wird oft als Pendant zum Gauss'schen Eliminationsverfahren für lineare Ungleichungssysteme bezeichnet [Pfa10]. Als Ergebnis der Projektion mit dem Fourier-Motzkin-Algorithmus erhält man nach [Ker00] einen Satz von teilweise redundanten Ungleichungen, die mit Hilfe der Lösung von linearen Programmen entfernt werden können.

Effizientere Methoden zur Ermittlung der Projektion werden in [JKoCEDM04] und [JKM08] vorgestellt.

% Die mpt-Toolbox stellt den Befehl

```
P.projection(dim, 'mplp') % dim = [1 3]
% zur Verfügung. der Vektor dim listet die Achsen auf,
% auf welche projiziert werden soll. Die Verwendung des
% Befehls 'fourier' empfiehlt sich nicht. Generell versagt
% der Projektionsalgorithmus, wenn Polytope schlecht
% konditioniert sind. Die Projektion eines volldimensionalen
% Polytops kann dann auf eine leere Menge im Unterraum führen.
```

Abbildung mit nicht-regulären Matrizen II. Die zuvor beschriebene Projektion ist ein Spezialfall der Abbildung mit singulärer Matrix. Die Formulierung (A.47) kann für die Abbildung einer singulären Matrix verwendet werden, wobei die Projektion eines Polytops der Dimension $m+n$ auszuwerten ist. Mit bestimmten Einschränkungen bezüglich der Dimension der Abbildungsmatrix \mathbf{A} , kann die Projektion mit Hilfe des folgenden Theorems umgangen werden.

Theorem 8 ([Ker00] Transformation mit singulärer Matrix)

Gegeben sei ein \mathcal{H} -Polytop

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}. \quad (\text{A.54})$$

mit $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $m \leq n$ gegeben und besitzt vollen Spaltenrang $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, dann ist

$$\mathcal{X}' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}_\perp \mathbf{x} = 0, \mathbf{M}\mathbf{A}_I \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \quad (\text{A.55})$$

wobei die Zeilen der Matrix $\mathbf{A}_\perp \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ den Nullraum von \mathbf{A}^T aufspannen und $\mathbf{A}_I \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Eigenschaft $\mathbf{A}_I \mathbf{A} = \mathbf{I}_m$ besitzt.

Die Matrix

$$\mathbf{A}_I = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (\text{A.56})$$

ist die linksinverse von \mathbf{A} und existiert unter der Rangbedingung, beispielsweise für quadratische Matrizen. Besitzt die Matrix nicht vollen Spaltenrang, dann lässt sich die Linksinverse nicht berechnen.

Wenn die Abbildungsmatrix nicht über maximalen Spaltenrang verfügt, so findet durch die Abbildung in der Regel ein Dimensionsabfall (bezogen auf den Bildraum) statt. Im Urbildbereich der Abbildung kann man einen Unterraum finden, $\text{kern}(\mathbf{A})$, welcher vollständig durch die singuläre Matrix \mathbf{A} auf den Nullpunkt abgebildet wird. Dieser wird Nullraum oder Kern genannt und ist von der Dimension des Rangabfalls $r = n - \text{rank}(\mathbf{A})$.

Objekte vom Typ Polyhedron der mpt-Toolbox können solche Transformationen durch

```
Q = P.affineMap(A)
```

ausführen.

Inverse Abbildung von Polytopen. Die punktweise inverse Transformation $\mathcal{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathcal{X}'$ gestaltet sich für \mathcal{H} -Polytope wie folgt:

$$\mathcal{X}' := \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}' \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_I \cdot \mathbf{x}' \leq \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{M}' \cdot \mathbf{x}' \leq \mathbf{b}\} \quad (\text{A.57})$$

Das Bildpolytop

$$\mathcal{X} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\mathbf{M}'\mathbf{A}}_M \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \quad (\text{A.58})$$

wird durch die Matrix \mathbf{M} beschrieben. Sucht man allgemeiner die inverse Abbildung der Transformation mit der nicht invertierbaren Matrix $\mathbf{A} : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, so folgt Gl. (A.58) auch direkt durch Einsetzen in Gl. (A.57).

```
% mpt-Toolbox
invAffineMap(T)
```

Spezielle Polytope. Als reguläre Polytope werden solche bezeichnet, welche bestimmte Symmetrien erfüllen wie beispielsweise die platonischen Körper im \mathbb{R}^3 . Diese sehr speziellen Geometrien sollen hier nicht weiter behandelt werden. Stattdessen sollen ein paar Untermengen von Polytopen im \mathbb{R}^n erwähnt werden.

Ein Simplex im \mathbb{R}^n ist ein Polytop mit nur $n + 1$ Eckpunkten, aber volldimensional. Im \mathbb{R}^2 sind dies Dreiecke, welche durch drei Eckpunkte definiert werden, die nicht auf einer Geraden liegen. Jedes Polytop kann in Simplizes zerlegt werden, wobei entsprechende Algorithmen als Triangulierung bezeichnet werden (u.a. [Fuk04]).

Polytope mit speziellen Symmetrieeigenschaften, welche wie folgt dargestellt werden können, werden Zonotope genannt [GG08]. Man vergleiche die folgende Definition mit der *Strukturierten Beschreibung* im Parameterraum:

Definition 16 (Zonotop)

Ein Zonotop \mathcal{Z} im \mathbb{R}^n ist gegeben durch

$$\mathcal{Z} := \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{N_z} \mathbf{h}_i p_i \mid p_i \in [-1, 1] \right\} \quad (\text{A.59})$$

mit dem Zentrumsvektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und den Richtungen $\mathbf{h}_i \in \mathbb{R}^n$, welche durch Multiplikation mit dem Einheitsintervallvektor Generatorintervalle bilden.

Mit Hilfe der Minkowski-Summe ist die folgende Darstellung möglich:

$$\mathcal{Z} := \mathbf{x}_0 \bigoplus_{i=1}^{N_z} \mathbf{h}_i p_i \quad (\text{A.60})$$

Diese Darstellung durch Generatorintervalle unterscheidet sich fundamental von den für allgemeine Polytope möglichen Darstellungen. Gelegentlich werden die Generatoren \mathbf{h}_i in der Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{[n \times N_z]}$ zusammengefasst, was aber nicht der Klarheit dient.

Liegt ein Zonotop mit $\tilde{\mathbf{x}}_0$ und $\tilde{\mathbf{H}} = \{\tilde{\mathbf{h}}_1 \dots \tilde{\mathbf{h}}_{N_z}\}$ und beliebigem Intervallvektor $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]^{N_z}$ vor, so kann ein \mathbf{x}_0 und \mathbf{H} gefunden werden, welches der normierten Darstellung

(A.59) entspricht. Ein Zonotop ist ein konvexes, beschränktes Polytop, mit starken Symmetrieeigenschaften. Für den Spezialfall des verschwindenden Verschiebungsvektors $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ kann eine Darstellung mit der Matrix \mathbf{M}

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} \mathbf{M}^T \\ -\mathbf{M}^T \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{A.61})$$

gefunden werden, um die Symmetrieeigenschaft von Zonotopen zu verdeutlichen. Ein Zonotop wird von mehreren Paaren paralleler Hyperflächen begrenzt, wie aus Gl. (A.61) hervorgeht. Mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gilt offensichtlich Ursprungssymmetrie:

$$\mathbf{x} \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow -\mathbf{x} \in \mathcal{Z} \quad (\text{A.62})$$

Die einfachste Form von Zonotopen ist durch ein Parallelotope in der jeweiligen Dimension n gegeben. Ein Parallelotope wird durch genau $2n$ Ungleichungen beschrieben und damit durch n Paare paralleler Randmengen beschrieben. Die Zahl der Eckpunkte eines volldimensionalen Parallelotops beträgt 2^n (Im \mathbb{R}^3 stellt das Parallelepiped einen solchen Körper dar, eingeschlossen von drei Paaren kongruenten Parallelogrammen).

Die Menge der Zonotope ist abgeschlossen bezüglich linearer Transformation

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 \bigoplus_{i=1}^{Np} \mathbf{h}_i p_i) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \bigoplus_{i=1}^{Np} \mathbf{A}\mathbf{h}_i p_i \quad (\text{A.63})$$

und der Minkowski-Summe:

$$\mathcal{Z}_1 \oplus \mathcal{Z}_2 = (\mathbf{x}_{1,0} + \mathbf{x}_{2,0}) \bigoplus_{i=1}^{Np_1} \mathbf{h}_{i1} p_i \bigoplus_{i=1}^{Np_2} \mathbf{h}_{i2} p_i \quad (\text{A.64})$$

Beide Operationen lassen sich in der Darstellung (A.59) effizient ausführen.

B. Intervallarithmetik

Als Meilenstein der Intervallarithmetik gilt [Moo69]. Anwendungen zeigt u.a. [Rau08]. Ein reelles Intervall $[a] = [\underline{a}; \bar{a}] \subseteq \mathbb{R}$ ist eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen mit

$$\underline{a} = \min_{[a]} a, \quad \bar{a} = \max_{[a]} a \quad (\text{B.1})$$

Ein beschränktes Intervall kann durch seinen Intervallmittelwert

$$\text{mid}[a] = \frac{1}{2}(\bar{a} + \underline{a}) \quad (\text{B.2})$$

und den Intervallradius

$$\text{rad}[a] = \frac{1}{2}(\bar{a} - \underline{a}) \quad (\text{B.3})$$

charakterisiert werden.

Die Auswertung grundlegender Operatoren $*$ soll dem Prinzip

$$[a] * [b] = \{a * b | a \in [a], b \in [b]\} \quad (\text{B.4})$$

folgen. Im Einzelnen gelten die Berechnungsvorschriften

$$[a] + [b] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}] \quad (\text{B.5})$$

$$[a] - [b] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}] \quad (\text{B.6})$$

$$[a] * [b] = [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}] \quad (\text{B.7})$$

$$[a]/[b] = [\underline{a}, \bar{a}] \cdot [1/\bar{b}, 1/\underline{b}] \quad 0 \notin [b]. \quad (\text{B.8})$$

Für Intervallvektoren $[\mathbf{a}]$ gelten die Operationen entsprechend elementweise und können auch auf Intervallmatrizen $[\mathbf{A}]$ erweitert werden.