

# Algorithmen und Datenstrukturen in C/C++

Prof. Dr. rer. nat. Peter Gerwinski

18. April 2024

# Algorithmen und Datenstrukturen in C/C++

<https://gitlab.cvh-server.de/pgerwinski/ad>

- 1 Einführung
- 2 Arrays und Zeiger für Fortgeschrittene
- 3 Langzahl-Arithmetik
- 4 Kryptographie
- 5 C++
- 6 Datenorganisation
- ...



Änderungen  
vorbehalten

### 3 Langzahl-Arithmetik

Problem: Rechnen mit ganzen Zahlen, die größer sind als das, was der Rechner normalerweise verarbeiten kann

#### Aufgabe: Addition langer Zahlen

- (a) Überlegen Sie sich eine Datenstruktur, um eine lange Zahl zu speichern.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion, die zwei lange Zahlen addiert.

#### Lösungsansätze

- ziffernweise (z. B. Zahlen als Strings abspeichern)
- zu einer Zehnerpotenz-Basis (z. B. 1 000 000 000)
- zu einer Zweierpotenz-Basis (z. B.  $2^{32}$ )
- speziell: Registerbreite  $\longrightarrow$  Hardware-Unterstützung (in Assembler)

### 3 Langzahl-Arithmetik

Problem: Rechnen mit ganzen Zahlen, die größer sind als das, was der Rechner normalerweise verarbeiten kann

- Grundrechenarten (einschließlich „modulo“): „schriftlich“ rechnen
- **binäre Exponentiation**:  
Basis fortlaufend quadrieren, ggf. damit multiplizieren  
Beispiel:  $x^9 = ((x^2)^2)^2 \cdot x$
- Suche nach  $d$  mit  $d \cdot e \bmod N = 1$ :  
**erweiterter euklidischer Algorithmus**

→ RSA

#### Aufgabe: RSA effizient implementieren

- Verwenden Sie den Datentyp `uint64_t` (oder Langzahl-Arithmetik)
- Für Details siehe: [ad-20240411.txt](#)

## 4 Kryptographie

4.  $(x^2 - 1)$  Der Herr der Ringe: Manchmal ist  $1 + 1 = 0$ .

4.  $(x^2 - 1).x$  Motivation

Man kann auch mit sehr merkwürdigen Objekten wie mit „ganz normalen“ Zahlen rechnen.

Anwendungen:

- Funktionsweise von Computern ( $\longrightarrow$  Rechnertechnik)
- Fehlererkennung
- Fehlerkorrektur
- Verschlüsselung
- Digitale Signaturen

## 4 Kryptographie

4.  $(x^2 - 1)$  Der Herr der Ringe: Manchmal ist  $1 + 1 = 0$ .

4.  $(x^2 - 1) \cdot (x + 1)$  Gruppen

**Definition:** Sei  $G$  eine Menge,  $*$  eine Verknüpfung auf  $G$ . Wenn

- $\forall a, b, c \in G: (a * b) * c = a * (b * c)$  (Assoziativgesetz),
- $\exists e \in G: \forall a \in G: a * e = e * a = a$  (neutrales Element),
- $\forall a \in G: \exists a^{-1} \in G: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$  (inverses Element),

dann heißt  $(G, *)$  eine *Gruppe*.

**Definition:** Sei  $(G, *)$  eine Gruppe. Wenn zusätzlich

- $\forall a, b \in G: a * b = b * a$  (Kommutativgesetz),

dann heißt  $(G, *)$  eine *kommutative Gruppe*.

## 4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$ .

### 4. $(x^2 - 1) \cdot (x + 2)$ Ringe

**Definition:** Sei  $R$  eine Menge; seien  $+$  und  $\cdot$  Verknüpfungen auf  $R$ . Wenn

- $(R, +)$  eine kommutative Gruppe ist,
- $\forall a, b, c \in R: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (Assoziativgesetz),
- $\forall a, b, c \in R: (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  und  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (Distributivgesetze),

dann heißt  $(R, +, \cdot)$  ein *Ring*.

**Definition:** Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring. Wenn zusätzlich

- $\forall a, b \in R: a \cdot b = b \cdot a$  (Kommutativgesetz),

dann heißt  $(R, +, \cdot)$  ein *kommutativer Ring*.

**Definition:** Sei  $(R, +, \cdot)$  ein (kommutativer) Ring. Wenn zusätzlich

- ein  $e \in R$  existiert, so daß für alle  $a \in R$  gilt:  $a \cdot e = e \cdot a = a$  (neutrales Element),

dann heißt  $(R, +, \cdot)$  ein *(kommutativer) Ring mit 1*.

4.  $(x^2 - 1)$  Der Herr der Ringe: Manchmal ist  $1 + 1 = 0$ .

4.  $(x^2 - 1) \cdot (x + 3)$  Körper

**Definition:** Sei  $K$  eine Menge; seien  $+$  und  $\cdot$  Verknüpfungen auf  $K$ . Wenn

- $(K, +, \cdot)$  ein Ring mit 1 ist und
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  eine kommutative Gruppe ist,

dann heißt  $(K, +, \cdot)$  ein *Körper*.

## 4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$ .

### 4. $(x^2 - 1) \cdot (x + 4)$ Anwendungen

Man kann auch mit sehr merkwürdigen Objekten wie mit „ganz normalen“ Zahlen rechnen.

- innermathematisch: Man kann beweisen, daß es ab  $x^5$  keine „ $p$ - $q$ -Formel“ mehr gibt und daß bestimmte Operationen mit Zirkel und Lineal unmöglich sind.
- asymmetrische Verschlüsselung, Signaturen: RSA, ElGamal, elliptische Kurven
- symmetrische Verschlüsselung: AES
- Fehlererkennung: Parität, CRC  
Anwendungen: Datenübertragung, RAID
- Fehlerkorrektur: Reed-Solomon  
Anwendungen: Raumsonden, optische Datenträger, ECC-RAM