

Algorithmen und Datenstrukturen in C/C++

Prof. Dr. rer. nat. Peter Gerwinski

11. April 2024

Hardwarenahe Programmierung

<https://gitlab.cvh-server.de/pgerwinski/hp>

- 1 Einführung
- 2 Einführung in C
- 3 Bibliotheken
- 4 Hardwarenahe Programmierung
- 5 **Algorithmen**
 - 5.1 Differentialgleichungen
 - 5.2 Rekursion
 - 5.3 Aufwandsabschätzungen
- 6 Objektorientierte Programmierung
- 7 **Datenstrukturen**
 - 7.1 Stack und FIFO
 - 7.2 Verkettete Listen
 - 7.3 Bäume

Algorithmen

Differentialgleichungen

- Pendel
- Planetenbahnen

Rekursion

- Türme von Hanoi

→ *Wie rechnet man das überhaupt aus?*

Aufwandsabschätzungen

- Selectionsort
- Bubblesort
- Quicksort

→ *Wie rechnet man das möglichst effizient aus?*

- ? möglichst schnell
- ? mit möglichst wenig Speicherplatzverbrauch
- ? unter Berücksichtigung gegebener Randbedingungen

Datenstrukturen

Structs und Objekte

- zusammengehörige Daten gemeinsam speichern

Stack und FIFO – Arrays

- effizientes Anfügen und Entfernen vorne und hinten
- effizienter direkter Zugriff auf Elemente in der Mitte
- ineffizientes Einfügen und Entfernen in der Mitte

Verkettete Listen – Structs mit Pointern

- effizientes Einfügen und Entfernen in der Mitte
- ineffizienter direkter Zugriff auf Elemente in der Mitte

Bäume – Structs mit Pointern

- Kompromiß

→ *Wie speichert man das möglichst effizient?*

- ? möglichst schnell
- ? mit möglichst wenig Speicherplatzverbrauch
- ? unter Berücksichtigung gegebener Randbedingungen

Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Türme von Hanoi: $\mathcal{O}(2^n)$

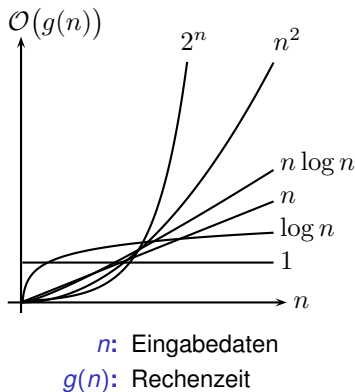
Für jede zusätzliche Scheibe
verdoppelt sich die Rechenzeit!

$$\rightarrow \frac{30,672 \text{ s} \cdot 2^{32}}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25} \approx 4174 \text{ Jahre}$$

für 64 Scheiben

Faustregel:

Schachtelung der Schleifen zählen
 k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$



Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

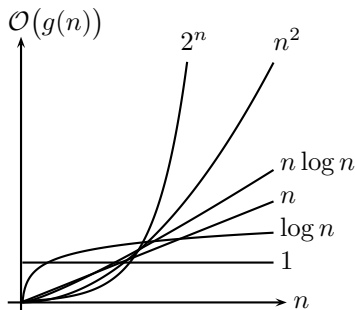
Faustregel:

Schachtelung der Schleifen zählen
 k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen: $\mathcal{O}(n)$
- Selection-Sort: $\mathcal{O}(n^2)$
- Bubble-Sort: $\mathcal{O}(n)$ bis $\mathcal{O}(n^2)$
- Quicksort: $\mathcal{O}(n \log n)$ bis $\mathcal{O}(n^2)$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow O(n^k)$

Wie schnell ist RSA?

(n = typische beteiligte Zahl, z. B. e, p, q)

- Ver- und Entschlüsselung (Exponentiation):

$$O((\log n)^2)$$

$$O(n^2)$$

- Schlüsselerzeugung (Berechnung von d):

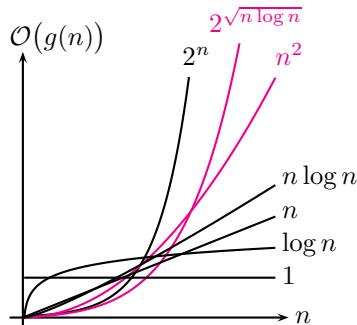
$$O((\log n)^2)$$

$$O(n^2)$$

- Verschlüsselung brechen (Primfaktorzerlegung):

$$O(2^{\sqrt{\log n \cdot \log \log n}})$$

$$O(2^{\sqrt{n \log n}})$$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

Die Sicherheit von RSA beruht darauf, daß das Brechen der Verschlüsselung aufwendiger ist als $O((\log n)^k)$ (für beliebiges k).

Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Wie schnell ist RSA?

(n = typische beteiligte Zahl, z. B. e, p, q)

- Ver- und Entschlüsselung (Exponentiation):

$$\mathcal{O}((\log n)^2)$$

$$\mathcal{O}(n^2)$$

- Schlüsselerzeugung (Berechnung von d):

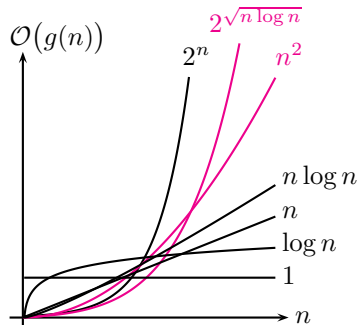
$$\mathcal{O}((\log n)^2)$$

$$\mathcal{O}(n^2)$$

- Verschlüsselung brechen (Primfaktorzerlegung):

$$\mathcal{O}(2^{\sqrt{\log n \cdot \log \log n}})$$

$$\mathcal{O}(2^{\sqrt{n \log n}})$$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

Die Sicherheit von RSA beruht darauf, daß das Brechen der Verschlüsselung aufwendiger ist als $\mathcal{O}((\log n)^k)$ (für beliebiges k).

Mit Quantencomputer: $\mathcal{O}((\log n)^3)$

Algorithmen und Datenstrukturen in C/C++

<https://gitlab.cvh-server.de/pgerwinski/ad>

- 1 Einführung
- 2 Arrays und Zeiger für Fortgeschrittene
- 3 Langzahl-Arithmetik
- 4 Kryptographie
- 5 C++
- 6 Datenorganisation
- ...



Änderungen
vorbehalten

2 Arrays und Zeiger für Fortgeschrittene

Array:

```
char a[] = "Test";
```

Zeiger:

```
char *p = "Test";
```

- In beiden Fällen wird ein Array von ganzen Zahlen (5 **char**-Variable mit den Werten 84, 101, 115, 116 und 0) im Speicher angelegt.
- Links heißt das Array **a**; rechts ist es „anonym“.
- Rechts wird zusätzlich ein Zeiger **p** im Speicher angelegt, der auf das (anonyme) Array zeigt.
- **&a** ist dasselbe wie **a**, nämlich die Adresse des Arrays.
- **&p** ist die Adresse des Zeigers.
- **p** ist der Wert des Zeigers, momentan also die Adresse des (anonymen) Arrays.

2 Arrays und Zeiger für Fortgeschrittene

Array:

```
char a[] = "Test";
```

Zeiger:

```
char *p = "Test";
```

- In beiden Fällen wird ein Array von ganzen Zahlen (5 **char**-Variable mit den Werten 84, 101, 115, 116 und 0) im Speicher angelegt.
- Links heißt das Array **a**; rechts ist es „anonym“.
- Rechts wird zusätzlich ein Zeiger **p** im Speicher angelegt, der auf das (anonyme) Array zeigt.
- **&a** ist **fast** dasselbe wie **a**, nämlich die Adresse des Arrays **bzw. das Array selbst, das zuweisungskompatibel zu einem Zeiger auf Elemente des Arrays ist. & bewirkt hier eine (nicht explizite!) Typumwandlung.**
- **&p** ist die Adresse des Zeigers.
- **p** ist der Wert des Zeigers, momentan also die Adresse des (anonymen) Arrays.

2 Arrays und Zeiger für Fortgeschrittene

Array:

```
char *a[] = { "Dies", "ist", "ein", "Test" };
```

Zeiger:

```
char **p = a;
```

- Array von Zeigern auf **char**-Variable
- Zeiger auf das Array = Zeiger auf Zeiger auf **char**-Variable
- Schleife durch äußeres Array mit **p++** möglich

2 Arrays und Zeiger für Fortgeschrittene

Array:

```
char a[][5] = { "Dies", "ist", "ein", "Test" };
```

Zeiger:

```
char *p = a[0];
```

- zweidimensionales Array von **char**-Variablen
- Zeiger auf Array-Komponente
= Zeiger auf eindimensionales Array
= Zeiger auf **char**-Variable
- Schleife durch äußeres Array mit Zeiger-Arithmetik ~~nicht~~ möglich


nur mit Trick: `p += 5`

2 Arrays und Zeiger für Fortgeschrittene

```
typedef char string5[5];  
string5 a[] = { "Dies", "ist", "ein", "Test" };  
string5 *p = a;
```

- Array von Array von **char**-Variablen
= zweidimensionales Array von **char**-Variablen
- Zeiger auf zweidimensionales Array
- Schleife durch äußeres Array mit **p++** möglich

→ Fazit:
Ein Hoch auf **typedef**!

→ Trotzdem: **Vorsicht!**
Ein **p++** auf einen Zeiger vom Typ **string5 *p**
ergibt anscheinend undefiniertes Verhalten!

2 Arrays und Zeiger für Fortgeschrittene

```
typedef char string5[5];  
string5 *p = { "Dies", "ist", "ein", "Test" };
```

- ~~• anonymes Array von Array von **char**-Variablen
= anonymes zweidimensionales Array von **char**-Variablen~~
- ~~• Zeiger auf zweidimensionales Array~~
- ~~• Schleife durch äußeres Array mit **p++** möglich~~

Das Konstrukt { "Dies", "ist", "ein", "Test" }
steht für ein Array von 4 Zeigern auf **char**-Variable.

string5 *p hingegen erwartet einen Zeiger auf ein Array von 5 **char**-Variablen.
Es bekommt die Adresse von "Dies" zugewiesen.

Durch das Erhöhen von **p** (um 5) zeigt es danach *zufällig* auf das "ist".
Bei nochmaligem Erhöhen zeigt es auf das "in" von "ein".

(Auch ohne Optimierung werden die Strings "ist", "ein" und "Test"
u. U. wegoptimiert.)

3 Langzahl-Arithmetik

Problem: Rechnen mit ganzen Zahlen, die größer sind als das, was der Rechner normalerweise verarbeiten kann

Aufgabe: Addition langer Zahlen

- (a) Überlegen Sie sich eine Datenstruktur, um eine lange Zahl zu speichern.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion, die zwei lange Zahlen addiert.

3 Langzahl-Arithmetik

Problem: Rechnen mit ganzen Zahlen, die größer sind als das, was der Rechner normalerweise verarbeiten kann

- Grundrechenarten (einschließlich „modulo“):
„schriftlich“ rechnen
- **binäre Exponentiation**:
Basis fortlaufend quadrieren, ggf. damit multiplizieren
Beispiel: $x^9 = ((x^2)^2)^2 \cdot x$
- Suche nach d mit $d \cdot e \bmod N = 1$:
erweiterter euklidischer Algorithmus

→ RSA

4 Kryptographie

4 Kryptographie

4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$.

4 Kryptographie

4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$.

4. $(x^2 - 1).x$ Motivation

Man kann auch mit sehr merkwürdigen Objekten wie mit „ganz normalen“ Zahlen rechnen.

4 Kryptographie

4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$.

4. $(x^2 - 1).x$ Motivation

Man kann auch mit sehr merkwürdigen Objekten wie mit „ganz normalen“ Zahlen rechnen.

Anwendungen:

- Funktionsweise von Computern (\longrightarrow Rechnertechnik)
- Fehlererkennung
- Fehlerkorrektur
- Verschlüsselung
- Digitale Signaturen

4 Kryptographie

4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$.

4. $(x^2 - 1) \cdot (x + 1)$ Gruppen

Definition: Sei G eine Menge, $*$ eine Verknüpfung auf G . Wenn

- $\forall a, b, c \in G: (a * b) * c = a * (b * c)$ (Assoziativgesetz),
- $\exists e \in G: \forall a \in G: a * e = e * a = a$ (neutrales Element),
- $\forall a \in G: \exists a^{-1} \in G: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (inverses Element),

dann heißt $(G, *)$ eine *Gruppe*.

4 Kryptographie

4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$.

4. $(x^2 - 1) \cdot (x + 1)$ Gruppen

Definition: Sei G eine Menge, $*$ eine Verknüpfung auf G . Wenn

- $\forall a, b, c \in G: (a * b) * c = a * (b * c)$ (Assoziativgesetz),
- $\exists e \in G: \forall a \in G: a * e = e * a = a$ (neutrales Element),
- $\forall a \in G: \exists a^{-1} \in G: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (inverses Element),

dann heißt $(G, *)$ eine *Gruppe*.

Definition: Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Wenn zusätzlich

- $\forall a, b \in G: a * b = b * a$ (Kommutativgesetz),

dann heißt $(G, *)$ eine *kommutative Gruppe*.

4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$.

4. $(x^2 - 1) \cdot (x + 2)$ Ringe

Definition: Sei R eine Menge; seien $+$ und \cdot Verknüpfungen auf R . Wenn

- $(R, +)$ eine kommutative Gruppe ist,
- $\forall a, b, c \in R: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativgesetz),
- $\forall a, b, c \in R: (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ und $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetze),

dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein *Ring*.

4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$.

4. $(x^2 - 1) \cdot (x + 2)$ Ringe

Definition: Sei R eine Menge; seien $+$ und \cdot Verknüpfungen auf R . Wenn

- $(R, +)$ eine kommutative Gruppe ist,
- $\forall a, b, c \in R: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativgesetz),
- $\forall a, b, c \in R: (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ und $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetze),

dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein *Ring*.

Definition: Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wenn zusätzlich

- $\forall a, b \in R: a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz),

dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein *kommutativer Ring*.

4. $(x^2 - 1)$ Der Herr der Ringe: Manchmal ist $1 + 1 = 0$.

4. $(x^2 - 1) \cdot (x + 2)$ Ringe

Definition: Sei R eine Menge; seien $+$ und \cdot Verknüpfungen auf R . Wenn

- $(R, +)$ eine kommutative Gruppe ist,
- $\forall a, b, c \in R: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativgesetz),
- $\forall a, b, c \in R: (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ und $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetze),

dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein *Ring*.

Definition: Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wenn zusätzlich

- $\forall a, b \in R: a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz),

dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein *kommutativer Ring*.

Definition: Sei $(R, +, \cdot)$ ein (kommutativer) Ring. Wenn zusätzlich

- ein $e \in R$ existiert, so daß für alle $a \in R$ gilt: $a \cdot e = e \cdot a = a$ (neutrales Element),

dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein *(kommutativer) Ring mit 1*.