

# Hardwarenahe Programmierung

## Musterlösung zu den Übungsaufgaben – 21. Januar 2019

### Aufgabe 1: Stack-Operationen

Wir betrachten das folgende Programm ([aufgabe-1.c](#)):

```
#include <stdio.h>

#define STACK_SIZE 10

int stack[STACK_SIZE];
int stack_pointer = 0;

void push (int x)
{
    stack[stack_pointer++] = x;
}

int pop (void)
{
    return stack[--stack_pointer];
}

void show (void)
{
    printf ("stack_content:");
    for (int i = 0; i < stack_pointer; i++)
        printf ("_%d", stack[i]);
    if (stack_pointer)
        printf ("\n");
    else
        printf ("_(empty)\n");
}

void insert (int x, int pos)
{
    for (int i = pos; i < stack_pointer; i++)
        stack[i + 1] = stack[i];
    stack[pos] = x;
    stack_pointer++;
}

void insert_sorted (int x)
{
    int i = 0;
    while (i < stack_pointer && x < stack[i])
        i++;
    insert (x, i);
}

int main (void)
{
    push (3);
    push (7);
    push (137);
    show ();
    insert (5, 1);
    show ();
    insert_sorted (42);
    show ();
    insert_sorted (2);
    show ();
    return 0;
}
```

- (a) Ändern Sie das Programm so, daß die Funktion `insert()` ihren Parameter `x` an der Stelle `pos` in den Stack einfügt, und den sonstigen Inhalt des Stacks verschiebt, aber nicht zerstört. (3 Punkte)
- (b) Ändern Sie das Programm so, daß die Funktion `insert_sorted()` ihren Parameter `x` an derjenigen Stelle einfügt, an die er von der Sortierung her gehört. (Der Stack wird hierbei vor dem Funktionsaufruf als sortiert vorausgesetzt.) (2 Punkte)
- (c) Schreiben Sie eine zusätzliche Funktion `int search (int x)`, die die Position (Index) des Elements `x` innerhalb des Stack zurückgibt – oder `-1`, wenn `x` nicht im Stack enthalten ist. Der Rechenaufwand darf höchstens  $\mathcal{O}(n)$  betragen. (3 Punkte)
- (d) Wie (c), aber der Rechenaufwand darf höchstens  $\mathcal{O}(\log n)$  betragen. (4 Punkte)

### Lösung

- (a) Ändern Sie das Programm so, daß die Funktion `insert()` ihren Parameter `x` an der Stelle `pos` in den Stack einfügt, und den sonstigen Inhalt des Stacks verschiebt, aber nicht zerstört.  
Die `for`-Schleife in der Funktion `insert()` durchläuft das Array von unten nach oben. Um den Inhalt des Arrays von unten nach oben zu verschieben, muß man die Schleife jedoch von oben nach unten durchlaufen.

Um die Funktion zu reparieren, ersetze man also

```
for (int i = pos; i < stack_pointer; i++)
```

durch:

```
for (int i = stack_pointer - 1; i >= pos; i--)
```

(Siehe auch: [loesung-1.c](#))

- (b) Ändern Sie das Programm so, daß die Funktion `insert_sorted()` ihren Parameter `x` an derjenigen Stelle einfügt, an die er von der Sortierung her gehört. (Der Stack wird hierbei vor dem Funktionsaufruf als sortiert vorausgesetzt.)

Der Vergleich `x < stack[i]` als Bestandteil der `while`-Bedingung paßt nicht zur Durchlaufrichtung der Schleife (von unten nach oben).

Um die Funktion zu reparieren, kann man daher entweder das Kleinerzeichen durch ein Größerzeichen ersetzen (`x > stack[i]` – siehe [loesung-1b-1.c](#)) oder die Schleife von oben nach unten durchlaufen (siehe [loesung-1b-2.c](#)).

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, das Suchen nach der Einfügeposition mit dem Verschieben des Arrays zu kombinieren (siehe [loesung-1.c](#)). Hierdurch spart man sich eine Schleife; das Programm wird schneller. (Es bleibt allerdings bei  $\mathcal{O}(n)$ .)

- (c) Schreiben Sie eine zusätzliche Funktion `int search(int x)`, die die Position (Index) des Elements `x` innerhalb des Stack zurückgibt – oder `-1`, wenn `x` nicht im Stack enthalten ist. Der Rechenaufwand darf höchstens  $\mathcal{O}(n)$  betragen.

Man geht in einer Schleife den Stack (= den genutzten Teil des Arrays) durch. Bei Gleichheit gibt man direkt mit `return` den Index zurück. Nach dem Schleifendurchlauf steht fest, daß `x` nicht im Stack vorhanden ist; man kann dann direkt `-1` zurückgeben (siehe [loesung-1c.c](#)).

Da es sich um eine einzelne Schleife handelt, ist die Ordnung  $\mathcal{O}(n)$ .

- (d) Wie (c), aber der Rechenaufwand darf höchstens  $\mathcal{O}(\log n)$  betragen.

Um  $\mathcal{O}(\log n)$  zu erreichen, halbiert man fortwährend das Intervall von (einschließlich) `0` bis (ausschließlich) `stack_pointer` (siehe [loesung-1d.c](#)) – wie in der Funktion `push_sorted()` im Beispiel-Programm [stack-11.c](#).

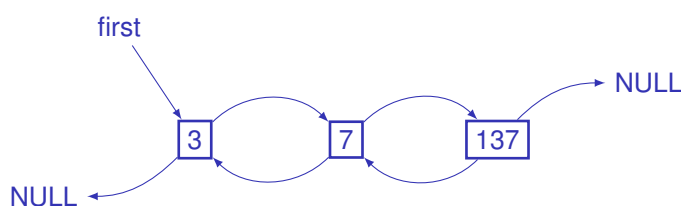
Ein wichtiger Unterschied besteht darin, daß man nach dem Durchlauf der Schleife noch auf die Gleichheit `x == stack[left]` (insbesondere nicht: `stack[right]`) prüfen und ggf. `left` bzw. `-1` zurückgeben muß.

## Aufgabe 2: Einfach und doppelt verkettete Listen

Das Beispiel-Programm [aufgabe-2.c](#) demonstriert zwei Funktionen zur Verwaltung einfach verketteter Listen: `output_list()` zum Ausgeben der Liste auf den Bildschirm und `insert_into_list()` zum Einfügen in die Liste.

- (a) Ergänzen Sie eine Funktion `delete_from_list()` zum Löschen eines Elements aus der Liste mit Freigabe des Speicherplatzes. (5 Punkte)
- (b) Ergänzen Sie eine Funktion `reverse_list()` die die Reihenfolge der Elemente in der Liste umdreht. (3 Punkte)

Eine doppelt verkettete Liste hat in jedem Knotenpunkt (`node`) zwei Zeiger – einen auf das nächste Element (`next`) und einen auf das vorherige Element (z. B. `prev` für „previous“). Dadurch ist es leichter als bei einer einfach verketteten Liste, die Liste in umgekehrter Reihenfolge durchzugehen.



Der Rückwärts-Zeiger ([prev](#)) des ersten Elements zeigt, genau wie der Vorwärts-Zeiger ([next](#)) des letzten Elements, auf *nichts*, hat also den Wert `NULL`.

- (c) Schreiben Sie das Programm um für doppelt verkettete Listen. (5 Punkte)

## Lösung

- (a) **Ergänzen Sie eine Funktion `delete_from_list()` zum Löschen eines Elements aus der Liste mit Freigabe des Speicherplatzes.**

Siehe: [loesung-2a.c](#)

Um ein Element aus einer verketteten Liste zu löschen, müssen zuerst die Zeiger umgestellt werden, um das Element von der Liste auszuschließen. Erst danach darf der Speicherplatz für das Element freigegeben werden.

Man benötigt also *das vorherige Element*, dessen [next](#)-Zeiger man dann auf das übernächste Element [next->next](#) setzt.

Bei jedem Zeiger muß man vor dem Zugriff prüfen, daß dieser nicht auf `NULL` zeigt. (Die Musterlösung ist in dieser Hinsicht nicht konsequent. Für den Produktiveinsatz müßte z. B. `delete_from_list()` auch den übergebenen Zeiger [what](#) auf `NULL` prüfen.)

Ein Spezialfall tritt ein, wenn das erste Element einer Liste entfernt werden soll. In diesem Fall tritt [first](#) an die Stelle des [next](#)-Zeigers des (nicht vorhandenen) vorherigen Elements. Da `delete_from_list()` *schreibend* auf [first](#) zugreift, muß [first](#) als Zeiger übergeben werden (`node **first`).

Um alle Spezialfälle zu testen (am Anfang, am Ende und in der Mitte der Liste), wurden die Testfälle im Hauptprogramm erweitert.

- (b) **Schreiben Sie das Programm um für doppelt verkettete Listen.**

Siehe: [loesung-2b.c](#)

Bei allen Einfüge- und Löschaktionen müssen *jeweils zwei* [next](#)- und [prev](#)-Zeiger neu gesetzt werden.

Zum Debuggen empfiehlt es sich sehr, eine Funktion zu schreiben, die die Liste auf Konsistenz prüft (hier: [check\\_list\(\)](#)).

Das Testprogramm macht von der Eigenschaft der doppelt verketteten Liste, daß man sie auch rückwärts effizient durchgehen kann, keinen Gebrauch. Um diese Eigenschaft als Vorteil nutzen zu können, empfiehlt es sich, zusätzlich zu [first](#) auch einen Zeiger auf das letzte Element (z. B. [last](#)) einzuführen. Dieser muß dann natürlich bei allen Operationen (Einfügen, Löschen, ...) auf dem aktuellen Stand gehalten werden.

## Aufgabe 3: Ternärer Baum

Der in der Vorlesung vorgestellte *binäre Baum* ist nur ein Spezialfall; im allgemeinen können Bäume auch mehr als zwei Verzweigungen pro Knotenpunkt haben. Dies ist nützlich bei der Konstruktion *balancierter Bäume*, also solcher, die auch im *Worst Case* nicht zu einer linearen Liste entarten, sondern stets eine – möglichst flache – Baumstruktur behalten.

Wir betrachten einen Baum mit bis zu drei Verzweigungen pro Knotenpunkt, einen sog. *ternären Baum*. Jeder Knoten enthält dann nicht nur einen, sondern *zwei* Werte als Inhalt:

```
typedef struct node
{
    int content_left, content_right;
    struct node *left, *middle, *right;
} node;
```

Wir konstruieren nun einen Baum nach folgenden Regeln:

- Innerhalb eines Knotens sind die Werte sortiert: [content\\_left](#) muß stets kleiner sein als [content\\_right](#).
- Der Zeiger [left](#) zeigt auf Knoten, deren enthaltene Werte durchweg kleiner sind als [content\\_left](#).
- Der Zeiger [right](#) zeigt auf Knoten, deren enthaltene Werte durchweg größer sind als [content\\_right](#).

- Der Zeiger `middle` zeigt auf Knoten, deren enthaltene Werte durchweg größer sind als `content_left`, aber kleiner als `content_right`.
- Ein Knoten muß nicht immer mit zwei Werten voll besetzt sein; er darf auch *nur einen* gültigen Wert enthalten.

Der Einfachheit halber lassen wir in diesem Beispiel nur positive Zahlen als Werte zu. Wenn ein Knoten nur einen Wert enthält, setzen wir `content_right = -1`, und der Zeiger `middle` wird nicht verwendet.

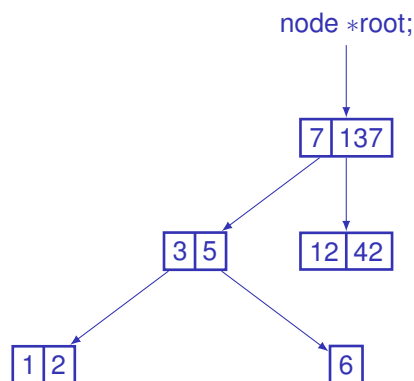
- Wenn wir neue Werte in den Baum einfügen, werden *zuerst* die nicht voll besetzten Knoten aufgefüllt und *danach erst* neue Knoten angelegt und Zeiger gesetzt.
- Beim Auffüllen eines Knotens darf nötigenfalls `content_left` nach `content_right` verschoben werden. Ansonsten werden einmal angelegte Knoten nicht mehr verändert.

(In der Praxis dürfen Knoten gemäß speziellen Regeln nachträglich verändert werden, um Entartungen gar nicht erst entstehen zu lassen – siehe z. B. <https://de.wikipedia.org/wiki/2-3-4-Baum>.)

- Zeichnen Sie ein Schaubild, das veranschaulicht, wie die Zahlen 7, 137, 3, 5, 6, 42, 1, 2 und 12 nacheinander und in dieser Reihenfolge in den oben beschriebenen Baum eingefügt werden – analog zu den Vortragsfolien (<hp-20190121.pdf>), Seite 43. (3 Punkte)
- Dasselbe, aber in der Reihenfolge 2, 7, 42, 12, 1, 137, 5, 6, 3. (3 Punkte)
- Beschreiben Sie in Worten und/oder als C-Quelltext-Fragment, wie eine Funktion aussehen müßte, um den auf diese Weise entstandenen Baum sortiert auszugeben. (4 Punkte)

## Lösung

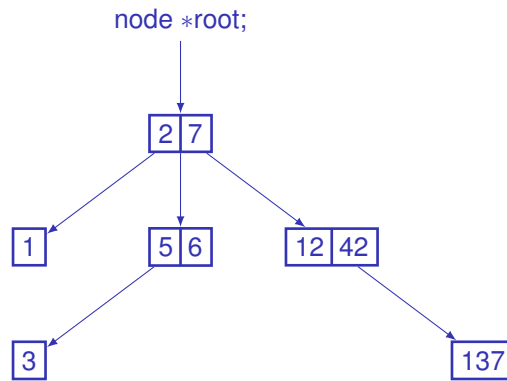
- Zeichnen Sie ein Schaubild, das veranschaulicht, wie die Zahlen 7, 137, 3, 5, 6, 42, 1, 2 und 12 nacheinander und in dieser Reihenfolge in den oben beschriebenen Baum eingefügt werden – analog zu den Vortragsfolien (<hp-20190121.pdf>), Seite 21.**



Bemerkungen:

- Zeiger mit dem Wert `NULL` sind nicht dargestellt: `right`-Zeiger von 7/137, `middle`-Zeiger von 3/5, sämtliche Zeiger von 1/2, 12/42 und 6.
- Beim Einfügen der 12 wird die sich bereits vorher in diesem `node` befindliche 42 zu `content_right`, und die 12 wird das neue `content_left`.
- Dieser Baum hat sehr einfache Regeln und ist daher *nicht* balanciert. Insbesondere unsere Regel, daß einmal angelegte Knoten nicht mehr verändert werden dürfen, steht dem im Wege. Ein einfaches Beispiel für einen *balancierten* ternären Baum ist der 2-3-Baum – siehe z. B. [https://en.wikipedia.org/wiki/2-3\\_tree](https://en.wikipedia.org/wiki/2-3_tree).

(b) Dasselbe, aber in der Reihenfolge 2, 7, 42, 12, 1, 137, 5, 6, 3.



Bemerkungen:

- Wieder sind Zeiger mit dem Wert **NULL** nicht dargestellt: **middle**- und **right**-Zeiger von 5/6, **left**- und **middle**-Zeiger von 12/42, sämtliche Zeiger von 1, 3 und 137.
  - Beim Einfügen der 12 wird wieder die sich bereits vorher in diesem **node** befindliche 42 zu **content\_right**, und die 12 wird das neue **content\_left**.
- (c) **Beschreiben Sie in Worten und/oder als C-Quelltext-Fragment, wie eine Funktion aussehen müßte, um den auf diese Weise entstandenen Baum sortiert auszugeben.**

Die entscheidende Idee ist **Rekursion**.

Eine Funktion, die den gesamten Baum ausgibt, müßte einmalig für den Zeiger **root** aufgerufen werden und folgendes tun:

1. falls der übergebene Zeiger den Wert **NULL** hat, nichts ausgeben, sondern die Funktion direkt beenden,
2. sich selbst für den **left**-Zeiger aufrufen,
3. den Wert von **content\_left** ausgeben,
4. sich selbst für den **middle**-Zeiger aufrufen,
5. sofern vorhanden (also ungleich **-1**), den Wert von **content\_right** ausgeben,
6. sich selbst für den **right**-Zeiger aufrufen.

Als C-Fragment:

```

void output_tree (node *root)
{
    if (root)
    {
        output_tree (root->left);
        printf ("%d\n", root->content_left);
        output_tree (root->middle);
        if (root->content_right >= 0)
            printf ("%d\n", root->content_right);
        output_tree (root->right);
    }
}
  
```

Die Datei [loesung-3c.c](#) erweitert dieses Fragment zu einem vollständigen C-Programm zum Erstellen und sortierten Ausgeben eines ternären Baums mit den Zahlenwerten von Aufgabenteil (a).