

Hardwarenahe Programmierung

Prof. Dr. rer. nat. Peter Gerwinski

19. Dezember 2024

Hardwarenahe Programmierung

<https://gitlab.cvh-server.de/pgerwinski/hp>

1 Einführung

2 Einführung in C

3 Bibliotheken

4 Hardwarenahe Programmierung

...

4.4 volatile-Variable

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

4.7 Speicherausrichtung – Alignment

4.8 Binärdarstellung von Gleitkommazahlen

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

5.2 Rekursion

5.3 Aufwandsabschätzungen

...

6 Objektorientierte Programmierung

7 Datenstrukturen

4.4 volatile-Variable

Externes Gerät ruft (per Stromsignal) Unterprogramm auf
Zeiger hinterlegen: „Interrupt-Vektor“
Beispiel: Taster

```
#include <avr/interrupt.h>
```

```
...
```

```
uint8_t key_pressed = 0;
```

```
ISR (INT0_vect)
```

```
{  
    key_pressed = 1;  
}
```

```
int main (void)
```

```
{
```

```
...
```

```
while (1)
```

```
{
```

```
    while (!key_pressed)
```

```
        ; /* just wait */
```

```
    PORTD ^= 0x40;
```

```
    key_pressed = 0;
```

```
}
```

```
return 0;
```

```
}
```

4.4 volatile-Variable

Externes Gerät ruft (per Stromsignal) Unterprogramm auf
Zeiger hinterlegen: „Interrupt-Vektor“
Beispiel: Taster

```
#include <avr/interrupt.h>
```

```
...
```

```
volatile uint8_t key_pressed = 0;
```

```
ISR (INT0_vect)
```

```
{  
    key_pressed = 1;  
}
```

```
int main (void)
```

```
{
```

```
...
```

```
while (1)
```

```
{
```

```
    while (!key_pressed)
```

```
        ; /* just wait */
```

```
        PORTD ^= 0x40;
```


```
        key_pressed = 0;
```

```
    }
```

```
    return 0;
```

```
}
```

volatile:
Speicherzugriff
nicht wegoptimieren



4.4 volatile-Variable

Was ist eigentlich PORTD?

```
avr-gcc -Wall -Os -mmcu=atmega328p blink-3.c -E
```

PORTD = 0x01;

→ `(*(volatile uint8_t *) ((0x0B) + 0x20)) = 0x01;`

↑
Umwandlung in Zeiger
auf **volatile** uint8_t

Zahl: 0x2B

Dereferenzierung des Zeigers

→ **volatile** uint8_t-Variable an Speicheradresse 0x2B

→ `PORTA = PORTB = PORTC = PORTD = 0` ist eine schlechte Idee.

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.

Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.

Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

$$1027 = 1024 + 2 + 1 = 0000\ 0100\ 0000\ 0011_2 = 0403_{16}$$

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.

Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

$$1027 = 1024 + 2 + 1 = 0000\ 0100\ 0000\ 0011_2 = 0403_{16}$$

Speicherzellen:

04	03
----	----

 Big-Endian „großes Ende zuerst“

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.

Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

$$1027 = 1024 + 2 + 1 = 0000\ 0100\ 0000\ 0011_2 = 0403_{16}$$

Speicherzellen:

04	03
----	----

Big-Endian „großes Ende zuerst“
für Menschen leichter lesbar

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.

Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

$$1027 = 1024 + 2 + 1 = 0000\ 0100\ 0000\ 0011_2 = 0403_{16}$$

Speicherzellen:

04	03
----	----

 Big-Endian „großes Ende zuerst“
für Menschen leichter lesbar

03	04
----	----

 Little-Endian „kleines Ende zuerst“

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.

Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

$$1027 = 1024 + 2 + 1 = 0000\ 0100\ 0000\ 0011_2 = 0403_{16}$$

Speicherzellen:

04	03
----	----

 Big-Endian „großes Ende zuerst“
für Menschen leichter lesbar

03	04
----	----

 Little-Endian „kleines Ende zuerst“
bei Additionen effizienter

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.
Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

$$1027 = 1024 + 2 + 1 = 0000\ 0100\ 0000\ 0011_2 = 0403_{16}$$

Speicherzellen:

04	03
----	----

 Big-Endian „großes Ende zuerst“
für Menschen leichter lesbar

03	04
----	----

 Little-Endian „kleines Ende zuerst“
bei Additionen effizienter

→ Geschmackssache

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.

Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

$$1027 = 1024 + 2 + 1 = 0000\ 0100\ 0000\ 0011_2 = 0403_{16}$$

Speicherzellen:

04	03
----	----

 Big-Endian „großes Ende zuerst“
für Menschen leichter lesbar

03	04
----	----

 Little-Endian „kleines Ende zuerst“
bei Additionen effizienter

→ Geschmackssache

... **außer bei Datenaustausch!**

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.1 Konzept

Eine Zahl geht über mehrere Speicherzellen.
Beispiel: 16-Bit-Zahl in 2 8-Bit-Speicherzellen

Welche Bits liegen wo?

—→ Geschmackssache

... **außer bei Datenaustausch!**

- Dateiformate
- Datenübertragung

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.2 Dateiformate

Audio-Formate: Reihenfolge der Bytes in 16- und 32-Bit-Zahlen

- RIFF-WAVE-Dateien (.wav): Little-Endian
- Au-Dateien (.au): Big-Endian

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.2 Dateiformate

Audio-Formate: Reihenfolge der Bytes in 16- und 32-Bit-Zahlen

- RIFF-WAVE-Dateien (.wav): Little-Endian
- Au-Dateien (.au): Big-Endian
- ältere AIFF-Dateien (.aiff): Big-Endian
- neuere AIFF-Dateien (.aiff): Little-Endian

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.2 Dateiformate

Audio-Formate: Reihenfolge der Bytes in 16- und 32-Bit-Zahlen

- RIFF-WAVE-Dateien (.wav): Little-Endian
- Au-Dateien (.au): Big-Endian
- ältere AIFF-Dateien (.aiff): Big-Endian
- neuere AIFF-Dateien (.aiff): Little-Endian

Grafik-Formate: Reihenfolge der Bits in den Bytes

- PBM-Dateien: Big-Endian
- XBM-Dateien: Little-Endian

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.2 Dateiformate

Audio-Formate: Reihenfolge der Bytes in 16- und 32-Bit-Zahlen

- RIFF-WAVE-Dateien (.wav): Little-Endian
- Au-Dateien (.au): Big-Endian
- ältere AIFF-Dateien (.aiff): Big-Endian
- neuere AIFF-Dateien (.aiff): Little-Endian

Grafik-Formate: Reihenfolge der Bits in den Bytes

- PBM-Dateien: Big-Endian, MSB first
- XBM-Dateien: Little-Endian, LSB first

MSB/LSB = most/least significant bit

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.3 Datenübertragung

- RS-232 (serielle Schnittstelle): LSB first
- I²C: MSB first
- USB: beides

4.5 Byte-Reihenfolge – Endianness

4.5.3 Datenübertragung

- RS-232 (serielle Schnittstelle): LSB first
- I²C: MSB first
- USB: beides
- Ethernet: LSB first
- TCP/IP (Internet): Big-Endian

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Speicher ist begrenzt!

→ feste Anzahl von Bits

8-Bit-Zahlen ohne Vorzeichen: `uint8_t`

→ Zahlenwerte von `0x00` bis `0xff` = 0 bis 255

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Speicher ist begrenzt!

→ feste Anzahl von Bits

8-Bit-Zahlen ohne Vorzeichen: `uint8_t`

→ Zahlenwerte von `0x00` bis `0xff` = 0 bis 255

→ $255 + 1 = 0$

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Speicher ist begrenzt!

→ feste Anzahl von Bits

8-Bit-Zahlen ohne Vorzeichen: `uint8_t`

→ Zahlenwerte von `0x00` bis `0xff` = 0 bis 255

→ $255 + 1 = 0$

8-Bit-Zahlen mit Vorzeichen: `int8_t`

`0xff` = 255 ist die „natürliche“ Schreibweise für -1 .

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Speicher ist begrenzt!

→ feste Anzahl von Bits

8-Bit-Zahlen ohne Vorzeichen: `uint8_t`

→ Zahlenwerte von `0x00` bis `0xff` = 0 bis 255

→ $255 + 1 = 0$

8-Bit-Zahlen mit Vorzeichen: `int8_t`

`0xff` = 255 ist die „natürliche“ Schreibweise für -1 .

→ Zweierkomplement

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Speicher ist begrenzt!

→ feste Anzahl von Bits

8-Bit-Zahlen ohne Vorzeichen: `uint8_t`

→ Zahlenwerte von `0x00` bis `0xff` = 0 bis 255

→ $255 + 1 = 0$

8-Bit-Zahlen mit Vorzeichen: `int8_t`

`0xff` = 255 ist die „natürliche“ Schreibweise für -1 .

→ Zweierkomplement

Oberstes Bit = 1: negativ

Oberstes Bit = 0: positiv

→ $127 + 1 = -128$

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Speicher ist begrenzt!

→ feste Anzahl von Bits

16-Bit-Zahlen ohne Vorzeichen: `uint16_t`

→ Zahlenwerte von `0x0000` bis `0xffff` = 0 bis 65535

→ $65535 + 1 = 0$

`uint8_t`

0 bis 255

$255 + 1 = 0$

16-Bit-Zahlen mit Vorzeichen: `int16_t`

`0xffff` = 65535 ist die „natürliche“ Schreibweise für -1 .

→ Zweierkomplement

`int8_t`

`0xff` = 255 = -1

Oberstes Bit = 1: negativ

Oberstes Bit = 0: positiv

→ $32767 + 1 = -32768$

Literatur: <http://xkcd.com/571/>

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Frage: Für welche Zahl steht der Speicherinhalt

a3	90
----	----

 (hexadezimal)?

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Frage: Für welche Zahl steht der Speicherinhalt

a3	90
----	----

 (hexadezimal)?

Antwort: Das kommt darauf an. ;—)

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Frage: Für welche Zahl steht der Speicherinhalt

a3	90
----	----

 (hexadezimal)?

Antwort: Das kommt darauf an. ;—)

Little-Endian:

als <code>int8_t</code> :	−93	(nur erstes Byte)
als <code>uint8_t</code> :	163	(nur erstes Byte)
als <code>int16_t</code> :	−28509	
als <code>uint16_t</code> :	37027	
<code>int32_t</code> oder größer:	37027	(zusätzliche Bytes mit Nullen aufgefüllt)

4.6 Binärdarstellung negativer Zahlen

Frage: Für welche Zahl steht der Speicherinhalt

a3	90
----	----

 (hexadezimal)?

Antwort: Das kommt darauf an. ;–)

Little-Endian:

als <code>int8_t</code> :	–93	(nur erstes Byte)
als <code>uint8_t</code> :	163	(nur erstes Byte)
als <code>int16_t</code> :	–28509	
als <code>uint16_t</code> :	37027	
<code>int32_t</code> oder größer:	37027	(zusätzliche Bytes mit Nullen aufgefüllt)

Big-Endian:

als <code>int8_t</code> :	–93	(nur erstes Byte)
als <code>uint8_t</code> :	163	(nur erstes Byte)
als <code>int16_t</code> :	–23664	
als <code>uint16_t</code> :	41872	
als <code>int32_t</code> :	–1550843904	(zusätzliche Bytes
als <code>uint32_t</code> :	2744123392	mit Nullen aufgefüllt)
als <code>int64_t</code> :	–6660823848880963584	
als <code>uint64_t</code> :	11785920224828588032	

4.7 Speicherausrichtung – Alignment

```
#include <stdint.h>
```

```
uint8_t a;  
uint16_t b;  
uint8_t c;
```

4.7 Speicherausrichtung – Alignment

```
#include <stdint.h>
```

```
uint8_t a;  
uint16_t b;  
uint8_t c;
```

Speicheradresse durch 2 teilbar – „16-Bit-Alignment“

- 2-Byte-Operation: effizienter

4.7 Speicherausrichtung – Alignment

```
#include <stdint.h>
```

```
uint8_t a;  
uint16_t b;  
uint8_t c;
```

Speicheradresse durch 2 teilbar – „16-Bit-Alignment“

- 2-Byte-Operation: effizienter
- ... oder sogar nur dann erlaubt

4.7 Speicherausrichtung – Alignment

```
#include <stdint.h>
```

```
uint8_t a;  
uint16_t b;  
uint8_t c;
```

Speicheradresse durch 2 teilbar – „16-Bit-Alignment“

- 2-Byte-Operation: effizienter
- ... oder sogar nur dann erlaubt

→ Compiler optimiert Speicherausrichtung

4.7 Speicherausrichtung – Alignment

```
#include <stdint.h>
```

```
uint8_t a;  
uint16_t b;  
uint8_t c;
```

Speicheradresse durch 2 teilbar – „16-Bit-Alignment“

- 2-Byte-Operation: effizienter
- ... oder sogar nur dann erlaubt

→ Compiler optimiert Speicherausrichtung

```
uint8_t a;  
uint8_t dummy;  
uint16_t b;  
uint8_t c;
```

4.7 Speicherausrichtung – Alignment

```
#include <stdint.h>
```

```
uint8_t a;  
uint16_t b;  
uint8_t c;
```

Speicheradresse durch 2 teilbar – „16-Bit-Alignment“

- 2-Byte-Operation: effizienter
- ... oder sogar nur dann erlaubt

→ Compiler optimiert Speicherausrichtung

```
uint8_t a;  
uint8_t dummy;    uint8_t a;  
uint16_t b;        uint8_t c;  
uint8_t c;         uint16_t b;
```

4.7 Speicherausrichtung – Alignment

```
#include <stdint.h>
```

```
uint8_t a;  
uint16_t b;  
uint8_t c;
```

Speicheradresse durch 2 teilbar – „16-Bit-Alignment“

- 2-Byte-Operation: effizienter
- ... oder sogar nur dann erlaubt

→ Compiler optimiert Speicherausrichtung

```
uint8_t a;  
uint8_t dummy;  
uint16_t b;  
uint8_t c;  
  
uint8_t a;  
uint8_t c;  
uint16_t b;
```

Fazit:

- **Adressen von Variablen sind systemabhängig**
- Bei Definition von Datenformaten Alignment beachten → effizienter

4.8 Binärdarstellung von Gleitkommazahlen

Beispiel für Gleitkommazahl: $2,351 \cdot 10^5$ (oder: 2.351×10^5)

Bezeichnungen: Mantisse $\cdot 10^{\text{Exponent}}$

C-Schreibweise: **2.351e5** (oder: **2.351E5**)

4.8 Binärdarstellung von Gleitkommazahlen

Beispiel für Gleitkommazahl: $2,351 \cdot 10^5$ (oder: 2.351×10^5)

Bezeichnungen: Mantisse $\cdot 10^{\text{Exponent}}$

C-Schreibweise: **2.351e5** (oder: **2.351E5**)

Wie speichert man Gleitkommazahlen?

m -Bit-Zahl, davon

- e Bits für den Exponenten (einschließlich Vorzeichen) zur Basis 2 (statt 10),
- 1 Bit für das Vorzeichen der Mantisse,
- $m - e - 1$ Bits für die Mantisse.

4.8 Binärdarstellung von Gleitkommazahlen

Beispiel für Gleitkommazahl: $2,351 \cdot 10^5$ (oder: 2.351×10^5)

Bezeichnungen: Mantisse $\cdot 10^{\text{Exponent}}$

C-Schreibweise: **2.351e5** (oder: **2.351E5**)

Wie speichert man Gleitkommazahlen?

m -Bit-Zahl, davon

- e Bits für den Exponenten (einschließlich Vorzeichen) zur Basis 2 (statt 10),
- 1 Bit für das Vorzeichen der Mantisse,
- $m - e - 1$ Bits für die Mantisse.

Trick: Mantisse als *normalisierte Zahl* abspeichern

4.8 Binärdarstellung von Gleitkommazahlen

Beispiel für Gleitkommazahl: $2,351 \cdot 10^5$ (oder: 2.351×10^5)

Bezeichnungen: Mantisse $\cdot 10^{\text{Exponent}}$

C-Schreibweise: **2.351e5** (oder: **2.351E5**)

Wie speichert man Gleitkommazahlen?

m -Bit-Zahl, davon

- e Bits für den Exponenten (einschließlich Vorzeichen) zur Basis 2 (statt 10),
- 1 Bit für das Vorzeichen der Mantisse,
- $m - e - 1$ Bits für die Mantisse.

Trick: Mantisse als *normalisierte Zahl* abspeichern

Vorteil gegenüber ganzen Zahlen:

größerer Wertebereich bei vergleichbarem Speicherplatzbedarf

Nachteil gegenüber ganzen Zahlen: Rundungsfehler

→ **ungeeignet** für Anwendungen, bei denen es auf jedes Bit ankommt
(z. B. Verschlüsselung)

4.8 Binärdarstellung von Gleitkommazahlen

Problem beim Arbeiten mit Gleitkommazahlen: Auslöschung von Ziffern

- Zahlen aufsummieren:
vorher sortieren, mit der kleinsten Zahl beginnen

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t)$$

$$y'(t) = v_y(t)$$

$$v'_x(t) = 0$$

$$v'_y(t) = -g$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t) \qquad x(t) = \int v_x(t) dt$$

$$y'(t) = v_y(t) \qquad y(t) = \int v_y(t) dt$$

\Rightarrow

$$v'_x(t) = 0 \qquad v_x(t) = \int 0 dt$$

$$v'_y(t) = -g \qquad v_y(t) = \int -g dt$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t) \qquad x(t) = \int v_x(t) dt$$

$$y'(t) = v_y(t) \qquad y(t) = \int v_y(t) dt$$

\Rightarrow

$$v'_x(t) = 0 \qquad v_x(t) = \int 0 dt = v_{0x}$$

$$v'_y(t) = -g \qquad v_y(t) = \int -g dt$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t) \qquad x(t) = \int v_x(t) dt = \int v_{0x} dt$$

$$y'(t) = v_y(t) \qquad y(t) = \int v_y(t) dt$$

\Rightarrow

$$v'_x(t) = 0 \qquad v_x(t) = \int 0 dt = v_{0x}$$

$$v'_y(t) = -g \qquad v_y(t) = \int -g dt$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t) \qquad x(t) = \int v_x(t) dt = \int v_{0x} dt = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

$$y'(t) = v_y(t) \qquad y(t) = \int v_y(t) dt$$

\Rightarrow

$$v'_x(t) = 0 \qquad v_x(t) = \int 0 dt = v_{0x}$$

$$v'_y(t) = -g \qquad v_y(t) = \int -g dt$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t) \qquad x(t) = \int v_x(t) dt = \int v_{0x} dt = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

$$y'(t) = v_y(t) \qquad y(t) = \int v_y(t) dt$$

\Rightarrow

$$v'_x(t) = 0 \qquad v_x(t) = \int 0 dt = v_{0x}$$

$$v'_y(t) = -g \qquad v_y(t) = \int -g dt = v_{0y} - g \cdot t$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t) \qquad x(t) = \int v_x(t) dt = \int v_{0x} dt = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

$$y'(t) = v_y(t) \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \int v_y(t) dt = \int v_{0y} - g \cdot t dt$$

$$v'_x(t) = 0 \qquad v_x(t) = \int 0 dt = v_{0x}$$

$$v'_y(t) = -g \qquad v_y(t) = \int -g dt = v_{0y} - g \cdot t$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t) \qquad x(t) = \int v_x(t) dt = \int v_{0x} dt = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

$$y'(t) = v_y(t) \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \int v_y(t) dt = \int v_{0y} - g \cdot t dt = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v'_x(t) = 0 \qquad v_x(t) = \int 0 dt = v_{0x}$$

$$v'_y(t) = -g \qquad v_y(t) = \int -g dt = v_{0y} - g \cdot t$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x'(t) = v_x(t) \quad x += v_x * dt;$$

$$y'(t) = v_y(t) \quad y += v_y * dt;$$

\Rightarrow

$$v'_x(t) = 0 \quad v_x += 0 * dt;$$

$$v'_y(t) = -g \quad v_y += -g * dt;$$

5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

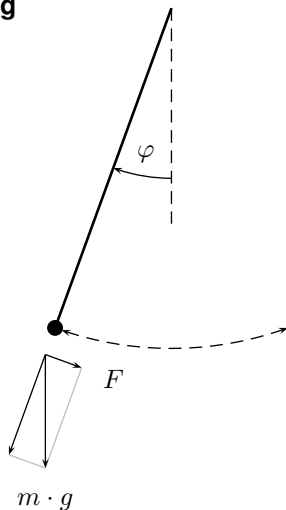
Beispiel 2: Mathematisches Pendel

$$\varphi'(t) = \omega(t)$$

$$\omega'(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi(t)$$

- Von Hand (analytisch):
Lösung raten (Ansatz), Parameter berechnen
- Mit Computer (numerisch):
Eulersches Polygonzugverfahren

```
phi += dt * omega;  
omega += - dt * g / l * sin (phi);
```



5 Algorithmen

5.1 Differentialgleichungen

Beispiel 1: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Beispiel 2: Mathematisches Pendel

$$\varphi'(t) = \omega(t)$$

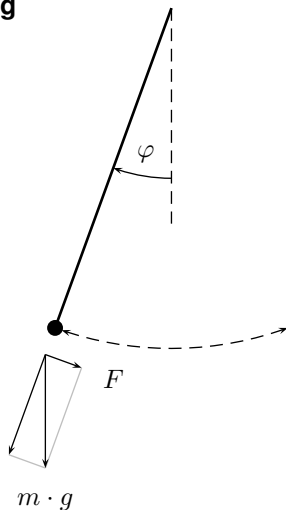
$$\omega'(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi(t)$$

- Von Hand (analytisch):
Lösung raten (Ansatz), Parameter berechnen
- Mit Computer (numerisch):
Eulersches Polygonzugverfahren

```
phi += dt * omega;  
omega += - dt * g / l * sin (phi);
```

Beispiel 3: Weltraum-Simulation

Praktikumsaufgabe



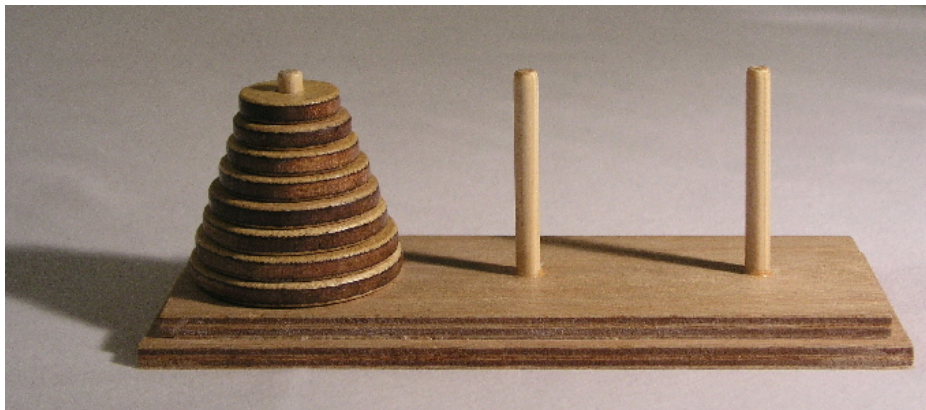
5.2 Rekursion

Vollständige Induktion: $\left. \begin{array}{l} \text{Aussage gilt für } n = 1 \\ \text{Schluß von } n - 1 \text{ auf } n \end{array} \right\} \text{ Aussage gilt für alle } n \in \mathbb{N}$

5.2 Rekursion

Vollständige Induktion: $\left. \begin{array}{l} \text{Aussage gilt für } n = 1 \\ \text{Schluß von } n - 1 \text{ auf } n \end{array} \right\} \text{ Aussage gilt für alle } n \in \mathbb{N}$

Türme von Hanoi

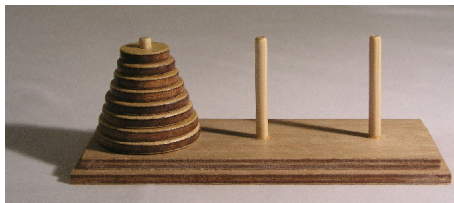


5.2 Rekursion

Vollständige Induktion: $\left. \begin{array}{l} \text{Aussage gilt für } n = 1 \\ \text{Schluß von } n - 1 \text{ auf } n \end{array} \right\} \text{ Aussage gilt für alle } n \in \mathbb{N}$

Türme von Hanoi

- 64 Scheiben, 3 Plätze, immer 1 Scheibe verschieben
- Ziel: Turm verschieben
- Es dürfen nur kleinere Scheiben auf größeren liegen.

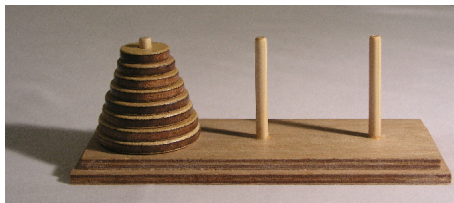


5.2 Rekursion

Vollständige Induktion: $\left. \begin{array}{l} \text{Aussage gilt für } n = 1 \\ \text{Schluß von } n - 1 \text{ auf } n \end{array} \right\} \text{ Aussage gilt für alle } n \in \mathbb{N}$

Türme von Hanoi

- 64 Scheiben, 3 Plätze, immer 1 Scheibe verschieben
- Ziel: Turm verschieben
- Es dürfen nur kleinere Scheiben auf größeren liegen.
- $n = 1$ Scheibe: fertig
- Wenn $n - 1$ Scheiben verschiebbar: schiebe $n - 1$ Scheiben auf Hilfsplatz, verschiebe die darunterliegende, hole $n - 1$ Scheiben von Hilfsplatz



5.2 Rekursion

Vollständige Induktion: $\left. \begin{array}{l} \text{Aussage gilt für } n = 1 \\ \text{Schluß von } n - 1 \text{ auf } n \end{array} \right\} \text{ Aussage gilt für alle } n \in \mathbb{N}$

Türme von Hanoi

- 64 Scheiben, 3 Plätze, immer 1 Scheibe verschieben
- Ziel: Turm verschieben
- Es dürfen nur kleinere Scheiben auf größeren liegen.
- $n = 1$ Scheibe: fertig
- Wenn $n - 1$ Scheiben verschiebbar: schiebe $n - 1$ Scheiben auf Hilfsplatz, verschiebe die darunterliegende, hole $n - 1$ Scheiben von Hilfsplatz

```
void move (int from, int to, int disks)
{
    if (disks == 1)
        move_one_disk (from, to);
    else
    {
        int help = 0 + 1 + 2 - from - to;
        move (from, help, disks - 1);
        move (from, to, 1);
        move (help, to, disks - 1);
    }
}
```

5.2 Rekursion

Vollständige Induktion: $\left. \begin{array}{l} \text{Aussage gilt für } n = 1 \\ \text{Schluß von } n - 1 \text{ auf } n \end{array} \right\} \text{Aussage gilt für alle } n \in \mathbb{N}$

Türme von Hanoi

- 64 Scheiben, 3 Plätze, immer 1 Scheibe verschieben
- Ziel: Turm verschieben
- Es dürfen nur kleinere Scheiben auf größeren liegen.
- $n = 1$ Scheibe: fertig
- Wenn $n - 1$ Scheiben verschiebbar: schiebe $n - 1$ Scheiben auf Hilfsplatz, verschiebe die darunterliegende, hole $n - 1$ Scheiben von Hilfsplatz

32 Scheiben:

```
$ time ./hanoi-9b
...
real      0m30,672s
user      0m30,662s
sys       0m0,008s
```

5.2 Rekursion

Vollständige Induktion: $\left. \begin{array}{l} \text{Aussage gilt für } n = 1 \\ \text{Schluß von } n - 1 \text{ auf } n \end{array} \right\} \text{ Aussage gilt für alle } n \in \mathbb{N}$

Türme von Hanoi

- 64 Scheiben, 3 Plätze, immer 1 Scheibe verschieben
- Ziel: Turm verschieben
- Es dürfen nur kleinere Scheiben auf größeren liegen.
- $n = 1$ Scheibe: fertig
- Wenn $n - 1$ Scheiben verschiebbar: schiebe $n - 1$ Scheiben auf Hilfsplatz, verschiebe die darunterliegende, hole $n - 1$ Scheiben von Hilfsplatz

32 Scheiben:

```
$ time ./hanoi-9b
...
real      0m30,672s
user      0m30,662s
sys       0m0,008s
```

→ etwas über 1 Minute
für 64 Scheiben

5.2 Rekursion

Vollständige Induktion: $\left. \begin{array}{l} \text{Aussage gilt für } n = 1 \\ \text{Schluß von } n - 1 \text{ auf } n \end{array} \right\} \text{ Aussage gilt für alle } n \in \mathbb{N}$

Türme von Hanoi

- 64 Scheiben, 3 Plätze, immer 1 Scheibe verschieben
- Ziel: Turm verschieben
- Es dürfen nur kleinere Scheiben auf größeren liegen.
- $n = 1$ Scheibe: fertig
- Wenn $n - 1$ Scheiben verschiebbar: schiebe $n - 1$ Scheiben auf Hilfsplatz, verschiebe die darunterliegende, hole $n - 1$ Scheiben von Hilfsplatz

32 Scheiben:

```
$ time ./hanoi-9b
...
real      0m30,672s
user      0m30,662s
sys       0m0,008s
```

~~→ etwas über 1 Minute
für 64 Scheiben~~

Für jede zusätzliche Scheibe verdoppelt sich die Rechenzeit!

→ $\frac{30,672 \text{ s} \cdot 2^{32}}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25} \approx 4174 \text{ Jahre}$
für 64 Scheiben

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

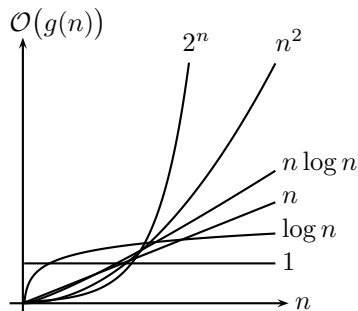
Wann ist ein Programm „schnell“?

Türme von Hanoi: $\mathcal{O}(2^n)$

Für jede zusätzliche Scheibe
verdoppelt sich die Rechenzeit!

$$\rightarrow \frac{30,672 \text{ s} \cdot 2^{32}}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25} \approx 4174 \text{ Jahre}$$

für 64 Scheiben



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Türme von Hanoi: $\mathcal{O}(2^n)$

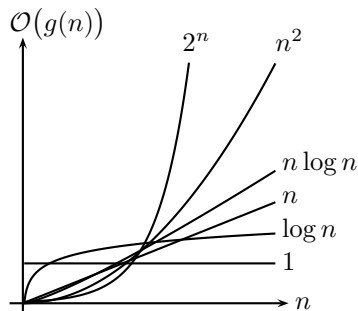
Für jede zusätzliche Scheibe
verdoppelt sich die Rechenzeit!

$$\rightarrow \frac{30,672 \text{ s} \cdot 2^{32}}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25} \approx 4174 \text{ Jahre}$$

für 64 Scheiben

Faustregel:

Schachtelung der Schleifen zählen
 k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

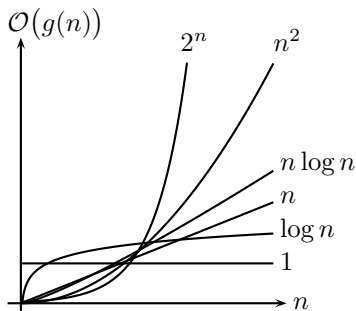
Faustregel:

Schachtelung der Schleifen zählen
 k Schleifen ineinander $\rightarrow O(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

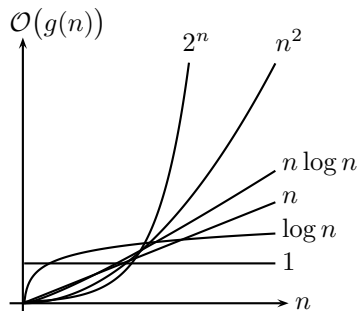
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow O(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

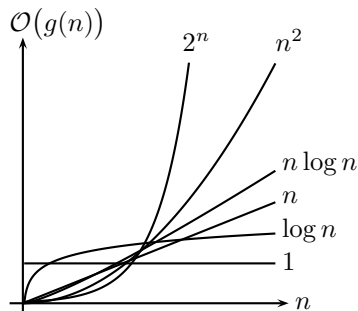
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

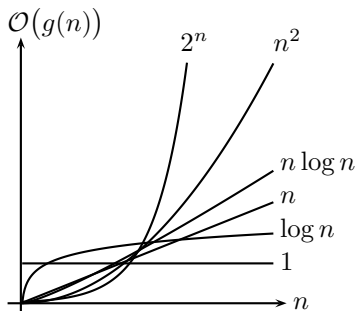
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

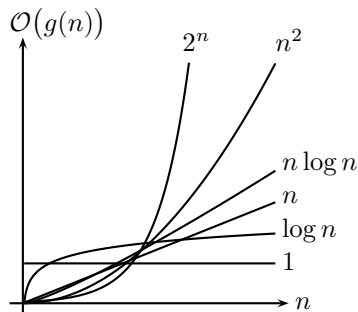
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen: $\mathcal{O}(n)$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

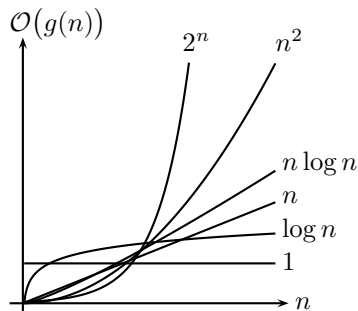
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen: $\mathcal{O}(n)$
- Selection-Sort



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

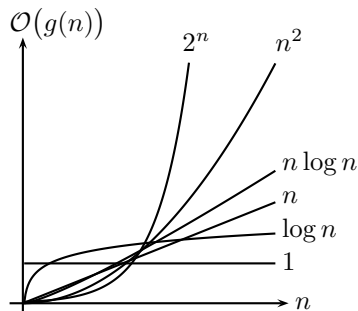
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen: $\mathcal{O}(n)$
- Selection-Sort: $\mathcal{O}(n^2)$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

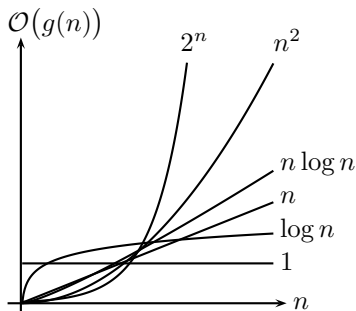
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen: $\mathcal{O}(n)$
- Selection-Sort: $\mathcal{O}(n^2)$
- Bubble-Sort



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

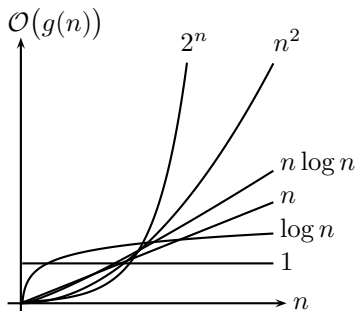
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen: $\mathcal{O}(n)$
- Selection-Sort: $\mathcal{O}(n^2)$
- Bubble-Sort: $\mathcal{O}(n)$ bis $\mathcal{O}(n^2)$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

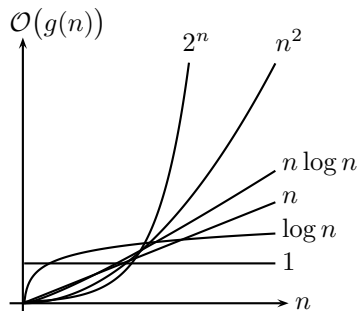
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen: $\mathcal{O}(n)$
- Selection-Sort: $\mathcal{O}(n^2)$
- Bubble-Sort: $\mathcal{O}(n)$ bis $\mathcal{O}(n^2)$
- Quicksort



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

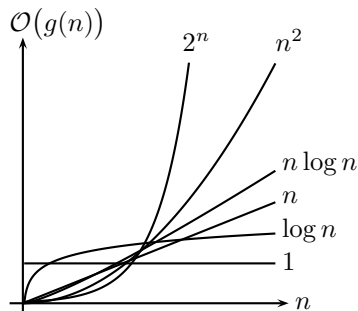
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Beispiel: Sortieralgorithmen

Anzahl der Vergleiche bei n Strings

- Maximum suchen mit Schummeln: $\mathcal{O}(1)$
- Maximum suchen: $\mathcal{O}(n)$
- Selection-Sort: $\mathcal{O}(n^2)$
- Bubble-Sort: $\mathcal{O}(n)$ bis $\mathcal{O}(n^2)$
- Quicksort: $\mathcal{O}(n \log n)$ bis $\mathcal{O}(n^2)$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Wie schnell ist RSA-Verschlüsselung?

$c = m^e \% N$ („%“ = „modulo“)

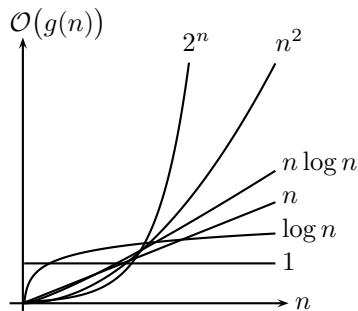
```
int c = 1;
for (int i = 0; i < e; i++)
    c = (c * m) % N;
```

- $\mathcal{O}(e)$ Iterationen
- mit Trick: $\mathcal{O}(\log e)$ Iterationen ($\log e$ = Anzahl der Ziffern von e)

Jede Iteration enthält eine Multiplikation und eine Division.

Aufwand dafür: $\mathcal{O}(\log e)$

\rightarrow Gesamtaufwand: $\mathcal{O}((\log e)^2)$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

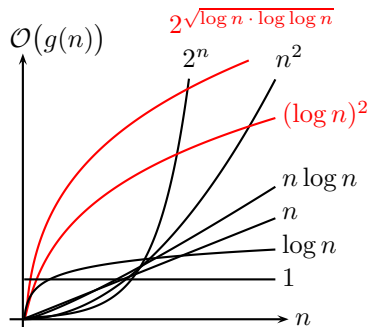
Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow \mathcal{O}(n^k)$

Wie schnell ist RSA?

(n = typische beteiligte Zahl, z. B. e, p, q)

- Ver- und Entschlüsselung (Exponentiation):
 $\mathcal{O}((\log n)^2)$
- Schlüsselerzeugung (Berechnung von d):
 $\mathcal{O}((\log n)^2)$
- Verschlüsselung brechen (Primfaktorzerlegung):
 $\mathcal{O}(2^{\sqrt{\log n \cdot \log \log n}})$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

Die Sicherheit von RSA beruht darauf, daß das Brechen der Verschlüsselung aufwendiger ist als $\mathcal{O}((\log n)^k)$ (für beliebiges k).

5.3 Aufwandsabschätzungen – Komplexitätsanalyse

Wann ist ein Programm „schnell“?

Faustregel:

Schachtelung der Schleifen zählen

k Schleifen ineinander $\rightarrow O(n^k)$

Wie schnell ist RSA?

(n = typische beteiligte Zahl, z. B. e, p, q)

- Ver- und Entschlüsselung (Exponentiation):

$$O((\log n)^2)$$

$$O(n^2)$$

- Schlüsselerzeugung (Berechnung von d):

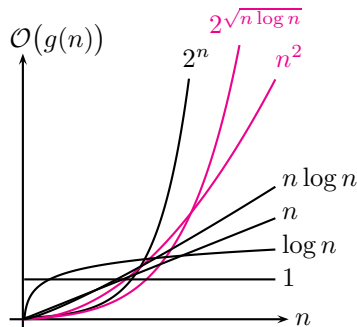
$$O((\log n)^2)$$

$$O(n^2)$$

- Verschlüsselung brechen (Primfaktorzerlegung):

$$O(2^{\sqrt{\log n \cdot \log \log n}})$$

$$O(2^{\sqrt{n \log n}})$$



n : Eingabedaten

$g(n)$: Rechenzeit

Die Sicherheit von RSA beruht darauf, daß das Brechen der Verschlüsselung aufwendiger ist als $O((\log n)^k)$ (für beliebiges k).